Symplektische Diracoperatoren auf dem komplexen projektiven Raum

Diplomarbeit

von Christian Wyss

Universität Bremen

Fachbereich Mathematik

Mai 2003

1. Gutachter: Prof. Dr. Jens Gamst
2. Gutachter: PD Dr. Katharina Habermann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ende der zwanziger Jahre suchte Paul Dirac nach einer relativistischen linearen Wellengleichung zur Beschreibung von Elektronen. Dazu konstruierte er einen Differentialoperator 1. Ordnung, dessen Quadrat der Laplaceoperator ist.

In der riemannschen Spingeometrie wird diese Konstruktion mit Hilfe des Formalismus der assoziierten Vektorbündel auf beliebige riemannsche Mannigfaltigkeiten übertragen. Der so definierte Diracoperator wirkt auf Schnitte eines endlichdimensionalen Vektorbündels, des sogenannten Spinorbündels. Die riemannsche Spingeometrie hat eine Fülle von Anwendungen, insbesondere verbindet sie analytische Eigenschaften des Diracoperators mit geometrischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit. In diesem Zusammenhang spielt das Quadrat des Diracoperators eine ausgezeichnete Rolle. Es ist ein Operator 2. Ordnung vom Laplacetyp, für den eine Weitzenböckformel gilt.

In ihrer Habilitationsschrift [3] hat Katharina Habermann die Definition der Diracoperatoren aus der riemannschen Spingeometrie auf symplektische Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Vorgehen ist dabei im Prinzip dasselbe wie im riemannschen Fall, da alle bei der Konstruktion verwendeten Elemente eine Entsprechung im symplektischen Kontext haben: Der symplektische Diracoperator D ist definiert als Verkettung der kovarianten Ableitung eines symplektischen Zusammenhangs mit der symplektischen Cliffordmultiplikation in dem zu einer metaplektischen Struktur assoziierten symplektischen Spinorbündel.

Trotz dieser formalen Analogie gibt es zwei grundsätzliche Unterschiede. Zum einen ist das symplektische Spinorbündel im Gegensatz zum riemannschen Fall ein Vektorbündel von unendlichdimensionalem Fasertyp. Dieser Umstand macht zusätzliche Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis nötig (Stichwort unbeschränkte Operatoren), führt aber im Ergebnis auch zu neuen Phänomenen. Der zweite Unterschied hat seinen Ursprung darin, dass in der riemannschen Cliffordalgebra $X^2 = -\|X\|^2$ gilt, während die symplektische Cliffordalgebra durch die Relation $X \cdot Y - Y \cdot X = -\omega(X, Y)$ definiert wird. Entsprechend übernimmt die Rolle des Quadrats des Diracoperators in der symplektischen Geometrie der Operator $P = i(\tilde{D}D - D\tilde{D})$. Dabei ist $\tilde{D}$ ein zweiter symplektischer Diracoperator, der unter Verwendung einer mit der symplektischen Form verträglichen fast-komplexen Struktur definiert wurde. In ihrer Habilitationsschrift hat K. Habermann für P eine Weitzenböckformel hergeleitet, insbesondere ist P ein Operator vom Laplacetyp. Außerdem hat sie gezeigt, wie sich im Falle einer Kähler-Mannigfaltigkeit das Spinorbündel in eine Folge endlichdimensionaler Teilbündel aufspaltet, die unter dem Operator P invariant sind. Für das Beispiel des komplexen projektiven Raumes $\mathbb{CP}_1$ hat sie damit das Spektrum von P berechnet.

In dieser Arbeit werde ich, nach dem Vorbild der Rechnung für $\mathbb{CP}_1$, die symplektischen Diracoperatoren auf komplexen projektiven Räumen ungerader Dimension $\mathbb{CP}_{2m-1}$ berechnen und dann das Spektrum von P bestimmen. Insbesondere werden die Resultate aus [3] zur Aufspaltung des Spinorbündels und zum Spektrum für $\mathbb{CP}_1$ bestätigt.

Das erste Kapitel über Vektorbündel dient vorallem der Klärung der Notation, im zweiten Kapitel werden alle nötigen Definitionen und Fakten aus der Habilitationsschrift gegeben, die zur Definition der Diracoperatoren auf symplektischen Mannigfaltigkeiten nötig sind. Im dritten Kapitel wird auf dem komplexen projektiven Raum $\mathbb{CP}_n$ beliebiger Dimension die Fubini-Study-Metrik definiert und $\mathbb{CP}_n$ als riemannscher symmetrischer Raum SU_{n+1}/U_n mit verträglicher komplexer Struktur, also als Kähler-Mannigfaltigkeit, beschrieben. Das erste Ergebnis ist dann, dass für ungerade komplexe Dimension $n = 2m-1$ auf $\mathbb{CP}_n$ eine metaplektische Struktur und ein symplektisches Spinorbündel konstruiert werden können. Für diesen Fall werden im 4. Kapitel die Operatoren D, $\tilde{D}$ und P berechnet. Die Formel für P enthält den auf dem Spinorbündel wirkenden Casimiroperator von SU_{n+1} und den Operator des harmonischen Oszillators. Das abschließende 5. Kapitel beschreibt die Zerlegung des Spinorbündels in endlichdimensionale Teilbündel, welche Eigenräumen des harmonischen Oszillators entsprechen. Damit ist die Berechnung des Spektrums von P zurückgeführt auf die Berechnung des Spektrums des Casimiroperators. Dies wird dann mit bekannten Methoden aus der Darstellungstheorie, insbesondere der Frobeniusreziprozität, durchgeführt. Im letzten Abschnitt von Kapitel 5 werden die gewonnenen Ergebnisse zusammengefasst und im Hinblick auf die allgemeinen Sätze aus [3] und das riemannsche Analogon diskutiert. Der Anhang enthält Beweise zu zwei Sätzen der Darstellungstheorie, die meist nicht in einführenden Lehrbüchern enthalten sind.

Für die gute Betreuung bei der Anfertigung dieser Diplomarbeit möchte ich mich bei Professor Jens Gamst und PD Dr. Katharina Habermann bedanken. Außerdem danke ich allen denen, die mir sonst mit Rat und Tat zur Seite standen.

Kapitel 1

Vektorbündel

Dieses Kapitel gibt einen kurzen Überblick über die Theorie der Prinzipalbündel, assoziierten Vektorbündel und Zusammenhänge sowie die verwendete Notation. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [6] und [9]. Unendlich dimensionale Mannigfaltigkeiten und Vektorbündel werden in [7] behandelt.

1.1 Prinzipalbündel

Sofern nicht anders angegeben, ist im Folgenden mit Mannigfaltigkeit stets eine differenzierbare Mannigfaltigkeit gemeint. Vektorfelder und allgemeiner Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten sind im Allgemeinen unendlich oft differenzierbar, und M bezeichnet eine n-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Definition 1.1 Sei G eine Liegruppe. Ein *G-Prinzipalbündel über M* ist eine Mannigfaltigkeit P mit einer surjektiven Abbildung $\pi : P \to M$ und einer bezüglich π fasertreuen Rechtsaktion von G auf P, so dass gilt (*lokale Trivialität*):
Zu jedem Punkt $a_0 \in M$ gibt es eine offene Umgebung U von a_0 in M und einen Diffeomorphismus

$$\psi :\ \pi^{-1}(U) \ \longrightarrow\ U \times G,$$

so dass

$$\begin{aligned} \psi(\pi^{-1}(a)) &= \{a\} \times G && \text{für } a \in U \\ \psi(Eh) &= (a, gh) && \text{für } \psi(E) = (a, g),\ h \in G \end{aligned}$$

gilt.

Beispiel 1.2 Sei $L(M)$ die Menge der Basen aller Tangentialräume von M. Für eine Basis $E = (X_1, \ldots, X_n) \in L(M)$ von T_aM definieren wir die Projektion π durch $\pi(E) = a$. Außerdem identifizieren wir E mit dem kanonischen Isomorphismus

$$E : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & T_aM \\ (r_1, \ldots, r_n) & \longmapsto & \sum_{j=1}^n r_j X_j \end{array} \tag{1.1}$$

und erhalten eine Rechtsaktion von $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ auf $L(M)$ durch Komposition der Isomorphismen: $Eg = E \circ g$. Dabei ist $E \in L(M)$, und die Matrix $g \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ wird als lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ aufgefasst.

Ist $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ eine Karte von M und sind $\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi_n}$ die zugehörigen Koordinatenvektorfelder, so ist $E_a = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(a), \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi_n}(a)\right) \in L(M)$ eine Basis von T_aM und jede andere Basis F von T_aM lässt sich als $F = E_a g$ mit $g \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ schreiben. Die bijektive Abbildung

$$\begin{aligned} U \times \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (a, g) &\longmapsto E_a g \end{aligned}$$

ist eine lokale Trivialisierung und macht $L(M)$ zu einem $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$-Prinzipalbündel über M.

Beispiel 1.3 Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $O(M)$ die Menge aller orthogonalen Basen der Tangentialräume von M. Dann ist für $E \in O(M)$ und eine orthogonale Matrix $g \in O_n$ die Verknüpfung Eg wieder eine orthogonale Basis, man erhält eine Rechtsaktion von O_n auf $O(M)$. Ausgehend von lokalen Koordinatenvektorfeldern liefert das Gram-Schmidt-Verfahren lokale Vektorfelder $X_1, \ldots, X_n$, definiert auf einer offenen Menge $U \subset M$, die in jedem Punkt $a \in U$ eine orthogonale Basis $E_a = (X_1(a), \ldots, X_n(a))$ von T_aM bilden. Die zugehörige Trivialisierung

$$\begin{aligned} U \times O_n &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (a, g) &\longmapsto E_a g \end{aligned}$$

gibt $O(M)$ die Struktur eines O_n-Prinzipalbündels.

Sei jetzt M eine *symplektische Mannigfaltigkeit*, d. h. eine Mannigfaltigkeit mit einer geschlossenen, alternierenden 2-Form. Analog zum riemannschen Fall erhält man dann das Sp_{2n}-Prinzipalbündel $Sp(M)$ der symplektischen Basen von M, wobei $2n$ die Dimension von M ist.

Beispiel 1.4 Sei G eine Liegruppe, $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe und G/H die Menge der Orbits gH der Rechtsaktion von H auf G mit zugehöriger Projektion $\pi : G \to G/H$. Dann hat G/H die Struktur einer Mannigfaltigkeit, bei der π differenzierbar und lokal trivial ist, vergleiche [13]. Das heißt, G ist ein H-Prinzipalbündel über G/H.

1.2 Assoziierte Vektorbündel

Sei V ein möglicherweise unendlichdimensionaler Banachraum und $\mathrm{Iso}(V)$ der Banachraum der stetigen Isomorphismen von V nach V, versehen mit der Operatornorm. Sei weiter $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel und $L : G \to \mathrm{Iso}(V)$ ein stetiger Homomorphismus. Durch

$$(E, v) \cdot g = (Eg, L(g^{-1})v)$$

ist eine Rechtsaktion von G auf $P \times V$ gegeben.

Definition 1.5 Das (zum Prinzipalbündel P) *assoziierte Vektorbündel mit Faser* V ist die Menge $Q = \{[E, v] \,|\, E \in P,\ v \in V\}$ der Orbits der oben definierten Rechtsaktion von G auf $P \times V$. Es wird mit $P \times_G V$ oder $P \times_L V$ bezeichnet. $\square$

Sei $\pi_Q : Q \to M$ die durch $\pi_Q([E, v]) = \pi(E)$ gegebene Projektion. Das Vektorbündel Q hat dann die Struktur einer topologischen Banach-Mannigfaltigkeit, wobei π_Q stetig und lokal trivial ist: Eine Trivialisierung $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ des Prinzipalbündels gibt einen Homöomorphismus

$$\begin{aligned} \psi_Q :\ \pi_Q^{-1}(U) &\longrightarrow U \times V \\ [E, v] &\longmapsto (a, L(g)v), \qquad \text{wobei } \psi(E) = (a, g). \end{aligned}$$

Ist der Homomorphismus L differenzierbar, so wird Q zu einer differenzierbaren Banach-Mannigfaltigkeit, die Projektion π_Q ist differenzierbar und ψ_Q ein Diffeomorphismus.

Jede Faser $\pi_Q^{-1}(a)$ des Vektorbündels ist ein zu V isomorpher Banachraum. Für $E \in \pi^{-1}(a)$ ist durch

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\cong} & \pi_Q^{-1}(a) \\ v & \longmapsto & E \cdot v = [E, v] \end{array} \tag{1.2}$$

ein Isomorphismus gegeben.

Definition 1.6 Unter einem *Schnitt* φ eines Vektorbündels Q versteht man eine Abbildung $\varphi :\ M \to Q$, für die $\pi_Q \circ \varphi = id$ gilt. Ist Q ein differenzierbares Vektorbündel, so bezeichnen wir mit $\Gamma(Q)$ die Menge aller differenzierbaren Schnitte von Q. $\square$

Unter Verwendung der Isomorphismen (1.2) kann einem Schnitt φ von Q durch $\varphi(\pi(E)) = E \cdot u(E)$ eindeutig eine Abbildung $u :\ P \to V$ zugeordnet werden, die *äquivariant* ist: $u(Eg) = L(g^{-1})u(E)$. Umgekehrt definiert jede solche äquivariante Abbildung einen Schnitt des Vektorbündels. Der Schnitt φ ist stetig bzw. differenzierbar genau dann, wenn die zugehörige Abbildung u stetig bzw. differenzierbar ist.

Beispiel 1.7 (Das Tangentialbündel) Sei $X \in T_aM$ ein Vektor des Tangentialbündels und $E \in L(M)$ gemäß (1.1) ein Isomorphismus $E : \mathbb{R}^n \to T_aM$. Dann können wir X durch den Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ mit $X = E \cdot v$ darstellen. Für $g \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ gilt $E \cdot v = Eg \cdot g^{-1}v$, und wir erhalten eine Darstellung

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\cong} & L(M) \times_{\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})} \mathbb{R}^n \\ E \cdot v & \longmapsto & [E, v] \end{array}$$

des Tangentialbündels als assoziiertes Vektorbündel zu $L(M)$ mit Faser $\mathbb{R}^n$.

Beispiel 1.8 (Tensorbündel) Für einen Vektorraum V bezeichnen wir mit V^* seinen Dualraum und mit

$$T^{(r,s)}(V) = \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{r\text{-mal}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{s\text{-mal}}$$

den Raum der r-fach kovarianten, s-fach kontravarianten Tensoren.

Der durch eine Basis $E \in L(M)$ von $T_a M$ gegebene Isomorphismus liefert über seine duale Abbildung $E^* : (T_a M)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ einen Isomorphismus

$$E^{-*} \otimes E^{-*} : \ T^{(2,0)}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow T^{(2,0)}(T_a M),$$

wobei $E^{-*} = (E^*)^{-1}$ ist. Ein Tensor $\alpha = (E^{-*} \otimes E^{-*})v$ wird bei einem Basiswechsel von E zu Eg, $g \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ durch

$$\alpha = \big((Eg)^{-*} \otimes (Eg)^{-*}\big) \circ \big(g^* \otimes g^*\big)(v)$$

dargestellt. Mit dem Homomorphismus $L : g \mapsto g^{-*} \otimes g^{-*}$ erhalten wir so eine Beschreibung des Bündels $T^{(2,0)}M = \bigcup_{a \in M} T^{(2,0)}(T_a M)$ der Tensoren vom Typ $(2,0)$ als assoziiertes Vektorbündel

$$T^{(2,0)}M = L(M) \times_L T^{(2,0)}(\mathbb{R}^n).$$

Sei jetzt α ein Schnitt von $T^{(2,0)}M$. Mittels der kanonischen Identifizierung kann man α als eine Bilinearform auf M auffassen. Diese ist differenzierbar genau dann, wenn für alle Vektorfelder X, Y die Funktion $\alpha(X,Y) : M \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

Auf analoge Art lässt sich jedes Tensorbündel $T^{(r,s)}M$ als assoziiertes Vektorbündel darstellen. Schließlich erhält man allgemein zu Vektorbündeln $Q_j = P \times_{L_j} V_j$, $j = 1, 2$ das Tensorbündel

$$Q_1 \otimes Q_2 = P \times_{L_1 \otimes L_2} V_1 \otimes V_2.$$

1.3 Zusammenhänge

Sei P ein G-Prinzipalbündel über der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Durch Differenzieren der Rechtsaktion $(E, g) \mapsto Eg$ nach g erhält man für jedes $E \in P$ einen Isomorphismus

$$\mathfrak{g} \to \operatorname{Ker} T_E \pi, \quad \xi \mapsto E\xi.$$

Differenzieren nach E liefert eine Rechtsaktion von G auf TP:

$$T_E P \to T_{Eg} P, \quad \eta \mapsto \eta g.$$

Definition 1.9 Eine *Zusammenhangs-1-Form* auf einem G-Prinzipalbündel P ist eine $\mathfrak{g}$-wertige Linearform auf P mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} Z(E\xi) &= \xi && \text{für } E \in P,\ \xi \in \mathfrak{g}, \\ Z(\eta g) &= Ad(g^{-1}) Z(\eta) && \text{für } \eta \in TP,\ g \in G. \end{aligned}$$

□

Eine solche Zusammenhangs-1-Form Z liefert eine Zerlegung $T_E P = \operatorname{Ker} Z_E \oplus \operatorname{Ker} T_E\pi$, dabei ist Z_E die 1-Form an der Stelle E. Der Unterraum $\operatorname{Ker} T_E\pi$ von $T_E P$ heißt *vertikaler Unterraum*, $\operatorname{Ker} Z_E$ *horizontaler Unterraum*. Eine durch eine Zusammenhangs-1-Form gegebene Familie horizontaler Unterräume eines Prinzipalbündels P wird *Zusammenhang* auf P genannt.

Ist $X \in T_a M$ ein Tangentialvektor, so existiert zu jedem $E \in \pi^{-1}(a)$ eindeutig ein $\eta \in \operatorname{Ker} Z_E$ mit $T_E\pi(\eta) = X$, der *horizontale Lift* von X.

Definition 1.10 Sei φ ein differenzierbarer Schnitt eines zu P assoziierten Vektorbündels $Q = P \times_L V$, dargestellt durch die äquivariante Abbildung $u : P \to V$. Die *kovariante Ableitung* von φ in Richtung des Tangentialvektors $X \in T_a M$ ist definiert durch

$$\nabla_X \varphi = E \cdot du(\eta),$$

wobei $\eta \in T_E P$ ein horizontaler Lift von X ist. □

Die Definition ist unabhängig von der Wahl von E. Für ein Vektorfeld X ist dann $\nabla_X\varphi : a \mapsto \nabla_{X(a)}\varphi$ wieder ein differenzierbarer Schnitt des Vektorbündels, wir haben also eine Abbildung

$$\begin{aligned} \nabla :\ \Gamma(TM) \times \Gamma(Q) &\longrightarrow \Gamma(Q) \\ (X, \varphi) \quad &\longmapsto \nabla_X \varphi. \end{aligned}$$

Diese ist linear in X und φ, und für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ gilt

$$\nabla_{fX}\varphi = f\nabla_X\varphi \quad \text{und} \quad \nabla_X(f\varphi) = Xf \cdot \varphi + f \cdot \nabla_X\varphi. \tag{1.3}$$

Da die kovariante Ableitung von φ in jedem Tangentialraum $T_a M$ eine lineare Abbildung $\nabla\varphi|_a : X \mapsto \nabla_X\varphi$ ist, kann man sie als Tensor $\nabla\varphi|_a \in T^*M \otimes Q$ auffassen. Aus der ersten Eigenschaft in (1.3) zeigt man dann, dass $\nabla\varphi$ ein differenzierbarer Schnitt des Tensorbündels ist. Die kovariante Ableitung ist also eine Abbildung

$$\nabla :\ \Gamma(Q) \ \longrightarrow\ \Gamma(T^*M \otimes Q).$$

Ein Zusammenhang auf $L(M)$ wird auch *linearer Zusammenhang* genannt. Er definiert auf dem Tangentialbündel eine kovariante Ableitung. Umgekehrt gibt es zu jeder bilinearen Abbildung $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ mit den Eigenschaften (1.3) genau einen linearen Zusammenhang, so dass ∇ die durch ihn auf TM definierte kovariante Ableitung ist. Durch

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

wird einem linearen Zusammenhang ein (2,1)-Tensorfeld, der *Torsionstensor*, zugeordnet.

Beispiel 1.11 (Levi-Civita-Zusammenhang) Es sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit, $g \in T^{(2,0)}M$ sei die Metrik. Man kann dann zeigen, dass es genau einen linearen Zusammenhang mit verschwindender Torsion gibt, für den $\nabla g = 0$ gilt. Dieser Zusammenhang wird *Levi-Civita-Zusammenhang* genannt.

1.4 Reduktionen

Definition 1.12 Seien H, G Liegruppen mit einem Homomorphismus $\alpha : H \to G$. Sei $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel sowie $\pi' : R \to M$ ein H-Prinzipalbündel. Eine Abbildung $f : R \to P$ heißt *Reduktion* von P auf R bezüglich α, falls f fasertreu ist (d. h. $\pi \circ f = \pi'$) und $f(Eh) = f(E)\alpha(h)$ für $E \in R$, $h \in H$ gilt. □

Sei $f : R \to P$ eine Reduktion bezüglich $\alpha : H \to G$. Ist V ein Banachraum, $L : G \to \mathrm{Iso}(V)$ ein stetiger Homomorphismus, so erhalten wir aus der Reduktion der Prinzipalbündel eine Reduktion des Vektorbündels $P \times_L V$ auf $R \times_{L\circ\alpha} V$ durch einen natürlichen, faserweise linearen Homöomorphismus

$$\begin{array}{ccc} R \times_{L\circ\alpha} V & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & P \times_L V \\ [E, v] & \longmapsto & [f(E), v]. \end{array} \tag{1.4}$$

Falls der Homomorphismus L differenzierbar ist, ist diese Abbildung ein Diffeomorphismus.

Definition 1.13 Ist $f : R \to P$ eine Reduktion von Prinzipalbündeln bezüglich $\alpha : H \to G$, und sind Z' und Z Zusammenhangs-1-Formen auf R bzw. P, so heißt Z' *Reduktion* von Z, falls gilt

$$Z \circ Tf = \alpha_* \circ Z'.$$

□

Man kann dann zeigen, dass zu jedem Zusammenhang auf R, gegeben durch die 1-Form Z', genau ein Zusammenhang auf P mit 1-Form Z existiert, für den Z' Reduktion von Z ist. Dabei gibt die Tangentialabbildung $T_E f$ einen Isomorphismus des horizontalen Unterraumes von $T_E R$ auf den horizontalen Unterraum von $T_{f(E)}P$. Die durch Z' und Z auf den differenzierbaren Vektorbündeln $R \times_{L\circ\alpha} V$ bzw. $P \times_L V$ definierten kovarianten Ableitungen stimmen, vermittelt durch den Diffeomorphismus (1.4), überein.

Beispiel 1.14 Sei M eine riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g. Die Inklusion $O(M) \hookrightarrow L(M)$ ist eine Reduktion von $L(M)$ auf $O(M)$ bezüglich des Homomorphismus $O_n \hookrightarrow \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$. Ein Zusammenhang auf $L(M)$ reduziert sich auf $O(M)$ genau dann, wenn $\nabla g = 0$ gilt.

Analoges gilt für eine symplektische Mannigfaltigkeit M mit symplektischer Form ω: Die Inklusion $Sp(M) \hookrightarrow L(M)$ ist eine Reduktion von $L(M)$ auf $Sp(M)$, und ein Zusammenhang auf $L(M)$ reduziert sich auf $Sp(M)$ genau dann, wenn $\nabla\omega = 0$ gilt.

Beispiel 1.15 Sei $\pi : P \to M$ ein G-Prinzipalbündel, H eine Liegruppe und $\alpha : G \to H$ ein Liehomomorphismus. Auf $P \times H$ können wir durch

$$(E, h) \sim (Eg, \alpha(g^{-1})h), \qquad g \in G$$

eine Äquivalenzrelation definieren. Für die Menge $P \times_\alpha H$ der Äquivalenzklassen ist durch $\pi_\alpha([E, h]) = \pi(E)$ eine Projektion und durch $[E, h]h' = [E, hh']$ eine Rechtsaktion von H gegeben. Damit hat $P \times_\alpha H$ die Struktur eines H-Prinzipalbündels und die Abbildung

$$\begin{aligned} P &\longrightarrow P \times_\alpha H \\ E &\longmapsto [E, e], \qquad e \text{ neutrales Element von } H, \end{aligned}$$

ist eine Reduktion bezüglich α.

Kapitel 2

Diracoperatoren auf symplektischen Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir alle Begriffe ein, die zur Definition symplektischer Diracoperatoren auf symplektischen Mannigfaltigkeiten nötig sind. Einen Überblick mit grundlegenden Eigenschaften und Beispielen gibt [2]. Eine ausführliche Darstellung findet man in [3].

2.1 Die symplektische Cliffordalgebra

Sei V ein reeller Vektorraum der Dimension $2n$ und ω eine symplektische Form auf V, d. h. ω ist eine nicht-entartete, alternierende 2-Form. Die *symplektische Cliffordalgebra* $\mathrm{sC}(V)$ von (V,ω) ist die assoziative $\mathbb{R}$-Algebra mit Einselement über V, in der

$$[v,w] = v \cdot w - w \cdot v = -\omega(v,w) \qquad \text{für } v,w \in V$$

gilt und welche die folgende universelle Eigenschaft hat: Jede lineare Abbildung $f : V \to A$ in eine Algebra A, für die ein Element a aus dem Zentrum von A existiert, so dass

$$f(v)f(w) - f(w)f(v) = -\omega(v,w)a \qquad \text{für alle } v,w \in V$$

gilt, induziert eindeutig einen Liealgebren-Homomorphismus $\hat{f} : \mathrm{sC}(V) \to A$ mit

$$\hat{f}(1) = a \qquad \text{und} \qquad \hat{f}(v) = f(v) \quad \text{für } v \in V.$$

Durch diese Eigenschaften ist $\mathrm{sC}(V)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.[1]

Sei $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ eine symplektische Basis von (V,ω). Es gilt also

$$\omega(e_j,e_k) = \omega(f_j,f_k) = 0, \quad \omega(e_j,f_k) = \delta_{jk},$$

[1] Eine Realisierung ist als Quotient der Tensoralgebra über V möglich.

d. h. in $\mathrm{sC}(V)$

$$e_j \cdot e_k = e_k \cdot e_j, \quad f_j \cdot f_k = f_k \cdot f_j, \quad e_j \cdot f_k - f_k \cdot e_j = -\delta_{jk}$$

für alle $j, k = 1, \ldots, n$. Die Algebra $\mathrm{sC}(V)$ wird von Produkten der Elemente $e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n$ erzeugt. Der Untervektorraum $\mathfrak{a}$ der symmetrischen, homogenen Polynome zweiten Grades wird erzeugt von den Elementen

$$\begin{array}{ll} e_j \cdot e_k,\ f_j \cdot f_k & \text{für } 1 \leq j \leq k \leq n, \\ e_j \cdot f_k + f_k \cdot e_j & \text{für } 1 \leq j, k \leq n, \end{array}$$

und diese bilden offenbar eine Basis von $\mathfrak{a}$. Wir betrachten jetzt die durch $\mathrm{ad}(v)w = [v, w]$ definierte adjungierte Darstellung $\mathrm{ad} : \mathrm{sC}(V) \to \mathrm{End}(\mathrm{sC}(V))$ der symplektischen Cliffordalgebra.

Lemma 2.1 *Der Unterraum $\mathfrak{a}$ der symmetrischen, homogenen Polynome zweiten Grades ist eine Lieunteralgebra von $\mathrm{sC}(V)$. Die Einschränkung der adjungierten Darstellung operiert auf V und liefert einen Liealgebren-Isomorphismus*

$$\mathrm{ad} : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{sp}(V).$$

Dabei ist $\mathfrak{sp}(V)$ die Liealgebra der Gruppe $Sp(V)$ der symplektischen Endomorphismen von V. Bezüglich der Basis $(e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ hat ad *die Matrixdarstellung*

$$\mathrm{ad}(e_j \cdot e_k) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E_{jk} - E_{kj} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \mathrm{ad}(f_j \cdot f_k) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline E_{jk} + E_{kj} & 0 \end{array}\right),$$

$$\mathrm{ad}(e_j \cdot f_k + f_k \cdot e_j) = \left(\begin{array}{c|c} 2E_{jk} & 0 \\ \hline 0 & -2E_{kj} \end{array}\right), \tag{2.1}$$

wobei E_{jk} die $n \times n$ Matrix ist, die an der Position (j, k) eine Eins und sonst Nullen hat.

Beweis: In der oben angegebenen Basis von $\mathfrak{a}$ berechnen wir für die adjungierte Darstellung:

$$\begin{aligned}
&[e_j \cdot e_k, e_l] = 0 \\
&[e_j \cdot e_k, f_l] = e_j \cdot (-\delta_{kl} + f_l \cdot e_k) - (\delta_{jl} + e_j \cdot f_l) \cdot e_k = -\delta_{kl} e_j - \delta_{jl} e_k \\
&[f_j \cdot f_k, e_l] = f_j \cdot (\delta_{kl} + e_l \cdot f_k) - (-\delta_{jl} + f_j \cdot e_l) \cdot f_k = \delta_{kl} f_j + \delta_{jl} f_k \\
&[f_j \cdot f_k, f_l] = 0 \\
&[e_j \cdot f_k + f_k \cdot e_j, e_l] = e_j \cdot [f_k, e_l] + [f_k, e_l] \cdot e_j = 2\delta_{kl} e_j \\
&[e_j \cdot f_k + f_k \cdot e_j, f_l] = [e_j, f_l] \cdot f_k + f_k \cdot [e_j, f_l] = -2\delta_{jl} f_k
\end{aligned}$$

Damit hat ad die Matrixdarstellung (2.1), und da diese Matrizen eine Basis der Liealgebra der symplektischen Gruppe Sp_{2n} bilden, erhalten wir einen Vektorraum-Isomorphismus. Nun ist die adjungierte Darstellung aber auch ein Liealgebren-Homomorphismus, und daraus folgt schließlich, dass $\mathfrak{a}$ eine Lieunteralgebra ist. $\square$

Die symplektische Gruppe $Sp(V)$ hat eine zweifache zusammenhängende Überlagerung, die sogenannte *metaplektische Gruppe* $Mp(V)$. Die zugehörige Überlagerungsabbildung $\varrho : Mp(V) \to Sp(V)$ liefert dann ebenfalls einen Isomorphismus $\varrho_* : \mathfrak{mp}(V) \to \mathfrak{sp}(V)$, und wir können

$$\operatorname{span}\{e_j \cdot e_k, f_j \cdot f_k, e_j \cdot f_k + f_k \cdot e_j \mid j,k = 1,\dots,n\} = \mathfrak{mp}(V)$$

und

$$\operatorname{ad} = \varrho_* \tag{2.2}$$

identifizieren.

Der Schwartzraum $S(\mathbb{R}^n)$ besteht aus den sogenannten schnell fallenden Funktionen. Das sind C^∞-Funktionen $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, die

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta u(x) \right| < \infty \qquad \text{mit } x^\alpha = x^{\alpha_1} \cdots x^{\alpha_n} \ \text{ und } \ \partial^\beta = \frac{\partial^{\beta_1}}{\partial x_1^{\beta_1}} \cdots \frac{\partial^{\beta_n}}{\partial x_n^{\beta_n}}$$

für beliebige Multiindizes α und β erfüllen. Der Schwartzraum ist ein dichter Unterraum von $L^2(\mathbb{R}^n)$, vergleiche z. B. [15]. Für eine gegebene symplektische Basis $(e_1,\dots,e_n,f_1,\dots,f_n)$ von V können wir aufgrund der universellen Eigenschaft der Clifforalgebra durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \sigma :\ 1 &\longmapsto i \\ e_j &\longmapsto ix_j \\ f_j &\longmapsto \frac{\partial}{\partial x_j} \end{aligned} \tag{2.3}$$

einen Liealgebren-Homomorphismus $\sigma : \mathrm{sC}(V) \to \mathrm{End}(S(\mathbb{R}^n))$ definieren. Jedes Bild $\sigma(a)$ ist ein unbeschränkter Operator auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $S(\mathbb{R}^n)$. Die durch

$$\begin{aligned} V \times S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ (v,u) &\longmapsto v \cdot u = \sigma(v)u \end{aligned}$$

definierte bilineare Abbildung wird *symplektische Cliffordmultiplikation* genannt.

Betrachtet man speziell $\mathbb{R}^{2n}$ mit der durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gegebenen symplektischen Standardform und der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^{2n}$ als symplektischer Basis, so erhält man die Cliffordmultiplikation mit Vektoren aus $\mathbb{R}^{2n}$.

2.2 Die metaplektische Darstellung

Um Diracoperatoren auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit M definieren zu können, muss man die im letzten Abschnitt definierte Cliffordmultiplikation mit Vektoren aus $\mathbb{R}^{2n}$ auf ein Vektorbündel über M mit Faser $L^2(\mathbb{R}^n)$ übertragen.

Möchte man dazu ein zu $Sp(M)$ assoziiertes Bündel verwenden, so wäre eine Darstellung $L\,:\,Sp_{2n}\to\mathrm{Iso}(L^2(\mathbb{R}^n))$ nötig, die mit der Cliffordmultiplikation verträglich ist, d. h., $L(g)\circ\sigma(a)=\sigma(ga)\circ L(g)$ gilt für alle $g\in Sp_{2n}$, $a\in\mathbb{R}^{2n}$ (vergleiche auch nächster Abbschnitt).

Tatsächlich gibt es solch eine Darstellung nicht. Nach Shale [11] existiert aber eine mit der Cliffordmultiplikation verträgliche Darstellung der metaplektischen Gruppe: Die sogenannte *metaplektische Darstellung*

$$L:\ Mp_{2n}\ \longrightarrow\ U(L^2(\mathbb{R}^n))$$

ist ein stetiger Homomorphismus in die mit der Operatornorm versehene Gruppe der unitären Operatoren von $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ist $\varrho:\ Mp_{2n}\to Sp_{2n}$ die Überlagerungsabbildung, so gilt

$$L(g)\circ\sigma(a)=\sigma(\varrho(g)a)\circ L(g)\qquad\text{für alle } g\in Mp_{2n},\ a\in\mathbb{R}^{2n}. \tag{2.4}$$

Betrachtet man ein Element $u\in S(\mathbb{R}^n)$, so ist nach Wallach [14] die Abbildung $\xi\mapsto L(\exp(\xi))u,\ \xi\in\mathfrak{mp}_{2n}$ differenzierbar und wir können das Differential der metaplektischen Darstellung durch

$$L_*(\xi)u=\frac{d}{dt}L(\exp(t\xi))u\Big|_{t=0}$$

definieren. Mit der Identifikation (2.2) und der Cliffordmultiplikation (2.3) gelten dann die folgenden Formeln, siehe [3] oder [14]:

$$\begin{aligned}L_*(e_j\cdot e_k)u&=-ie_j\cdot e_k\cdot u\\ L_*(f_j\cdot f_k)u&=-if_j\cdot f_k\cdot u\\ L_*(e_j\cdot f_k+f_k\cdot e_j)u&=-i(e_j\cdot f_k+f_k\cdot e_j)\cdot u\end{aligned}\qquad\text{für } u\in S(\mathbb{R}^n) \tag{2.5}$$

Es gilt also $L_*=-i\sigma:\mathfrak{mp}_{2n}\to\mathrm{End}(S(\mathbb{R}^n))$. Das Differential von L hat somit unbeschränkte Operatoren auf $S(\mathbb{R}^n)$ als Bild, und insbesondere ist die metaplektische Darstellung im Sinne der starken Topologie auf $U(L^2(\mathbb{R}^n))$ nicht differenzierbar.

2.3 Metaplektische Struktur und Spinorbündel

Um eine mit der Cliffordmultiplikation verträgliche Darstellung zu erhalten, mussten wir im letzten Abschnitt zur Überlagerung $\varrho:\ Mp_{2n}\to Sp_{2n}$ der symplektischen Gruppe übergehen. Um zur metaplektischen Darstellung ein Vektorbündel konstruieren zu können, benötigen wir also ein Mp_{2n}-Prinzipalbündel über M:

Definition 2.2 Sei (M,ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine *metaplektische Struktur* von M ist eine Reduktion $f:\,P\to Sp(M)$ des Sp_{2n}-Prinzipalbündels $Sp(M)$ bezüglich der Überlagerung ϱ. □

Die Frage der Existenz einer metaplektischen Struktur hängt nur von der Topologie der Mannigfaltigkeit M ab, vergleiche [2] oder [3].

Ist nun $f : P \to Sp(M)$ eine metaplektische Struktur, so ist also P ein Mp_{2n}-Prinzipalbündel, und wir können das Spinorbündel definieren.

Definition 2.3 Ist P eine metaplektische Struktur von M, so ist das *symplektische Spinorbündel* das zu P assoziierte Vektorbündel

$$Q = P \times_L L^2(\mathbb{R}^n),$$

wobei L die metaplektische Darstellung ist. □

Da L den Schwartzraum invariant lässt, ist durch

$$S = P \times_L S(\mathbb{R}^n)$$

ein Teilbündel von Q definiert. Die Darstellung $L : Mp_{2n} \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ ist stetig, nicht aber differenzierbar, daher sind Q und S topologische Vektorbündel mit Faser $L^2(\mathbb{R}^n)$ bzw. $S(\mathbb{R}^n)$. Trotzdem kann man differenzierbare Schnitte von Q definieren:

Definition 2.4 Ein Schnitt φ von Q heißt (unendlich oft) differenzierbar, falls die φ zugehörige L-äquivariante Abbildung $u : P \to L^2(\mathbb{R}^n)$ von der Klasse C^∞ ist. □

Entsprechend werden differenzierbare Schnitte von S erklärt. Man kann dann zeigen, vergleiche [3], dass jeder differenzierbare Schnitt von Q ein Schnitt von S ist. Die Menge dieser differenzierbaren Schnitte bezeichnen wir mit $\Gamma(Q) = \Gamma(S)$.

Sei jetzt ein symplektischer Zusammenhang auf (M, ω) gegeben, d. h. ein linearer Zusammenhang, für den $\nabla\omega = 0$ gilt. Nach Beispiel (1.14) reduziert sich dieser Zusammenhang auf $Sp(M)$ und ist daher durch eine 1-Form $Z : TSp(M) \to \mathfrak{sp}_{2n}$ gegeben. Durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} TP & \xrightarrow{Z'} & \mathfrak{mp}_{2n} \\ {\scriptstyle Tf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varrho_*} \\ TSp(M) & \xrightarrow{Z} & \mathfrak{sp}_{2n} \end{array}$$

wird eine Reduktion Z' von Z definiert, denn ϱ_* ist eine Isomorphismus. Da Q kein differenzierbares Vektorbündel ist, erhält man durch Z' nicht sofort den Formalismus einer kovarianten Ableitung. Wegen unserer Definition eines differenzierbaren Schnittes von Q kann man hier aber genau wie in Abschnitt 1.3 vorgehen:

Definition 2.5 Die *Spinorableitung* eines differenzierbaren Schnittes $\varphi \in \Gamma(Q)$ in Richtung $X \in T_aM$ ist definiert durch

$$\nabla_X \varphi = E \cdot du(\eta),$$

wobei u die φ zugeordnete äquivariante Abbildung ist und $\eta \in T_E P$ ein horizontaler Lift von X. □

Die Spinorableitung hat dann dieselben Eigenschaften wie die kovariante Ableitung, insbesondere gibt sie eine Abbildung $\nabla : \Gamma(Q) \to \Gamma(T^*M \otimes Q)$.

Schließlich wollen wir die Cliffordmultiplikation eines Tangentialvektors mit einem Spinor definieren. Die metaplektische Struktur P ist eine Reduktion von $Sp(M)$, also kann man das Tangentialbündel mittels des Diffeomorphismus (1.4) als $TM \cong P \times_\varrho \mathbb{R}^{2n}$ darstellen. Die Cliffordmultiplikation wird dann definiert als

$$\begin{array}{rccclr} \mu : & TM \times S & \longrightarrow & S & & \\ & ([E,a],[E,u]) & \longmapsto & [E, a \cdot u], & \quad a \in \mathbb{R}^{2n},\, u \in S(\mathbb{R}^n). \end{array} \tag{2.6}$$

Wegen der Verträglichkeitsbeziehung (2.4) ist diese Definition erlaubt und liefert eine bilineare Abbildung μ. Nun ist jedes $\sigma(a)$ ein unbeschränkter Operator, d. h. die Abbildung $u \mapsto a \cdot u$, $u \in S(\mathbb{R}^n)$ ist nicht stetig. Daher wird für ein Vektorfeld X und ein $\varphi \in \Gamma(S)$ durch $\mu(X, \varphi)$ zwar wieder ein Schnitt von S erklärt, im Allgemeinen wird dieser allerdings nicht einmal stetig sein. Bezeichnen wir mit $\Gamma^\times(S)$ die Menge *aller* Schnitte von S, so erhalten wir also eine Abbildung

$$\Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma^\times(S).$$

2.4 Definition der Diracoperatoren

Definition 2.6 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine *mit ω verträgliche fast-komplexe Struktur* ist ein Endomorphismenfeld $J : TM \to TM$, so dass $J^2 = -id$ gilt und durch $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ eine riemannsche Metrik gegeben ist. $\square$

Für eine symplektische Mannigfaltigkeit existiert stets eine verträgliche, fast-komplexe Struktur, vergleiche [8].

Sei nun eine symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) mit einer verträglichen, fast-komplexen Struktur J gegeben und g die zugehörige Metrik. Wir können das Tangentialbündel dann auf zwei Arten mit dem Kotangentialbündel identifizieren: mittels ω per

$$TM \overset{\omega}{\cong} T^*M, \quad X \longmapsto \omega(X, \cdot), \tag{2.7}$$

und mittels g per

$$TM \overset{g}{\cong} T^*M, \quad X \longmapsto g(X, \cdot). \tag{2.8}$$

Dies führt zur Definition zweier Diracoperatoren:

Definition 2.7 Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit mit einer metaplektischen Struktur P, einer mit ω verträglichen, fast-komplexen Struktur J und einem symplektischen Zusammenhang. Die *symplektischen Diracoperatoren* D und $\tilde{D}$ sind dann definiert als Verkettung der Spinorableitung ∇ mit der Cliffordmultiplikation μ:

$$D: \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S) \overset{\omega}{\cong} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma^\times(S)$$
$$\tilde{D}: \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes S) \overset{g}{\cong} \Gamma(TM \otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma^\times(S)$$

Das Tangentialbündel wird dabei mit dem Kotangentialbündel mittels (2.7) bzw. (2.8) identifiziert. □

Ausgehend von den Diracoperatoren definieren wir noch den Operator 2. Ordnung

$$P = i(\tilde{D}D - D\tilde{D}).$$

Sein Definitionsbereich ist $D^{-1}(\Gamma(S)) \cap \tilde{D}^{-1}(\Gamma(S))$. In [3] wird gezeigt, dass P ein Operator vom Laplacetyp und im Fall einer Kähler-Mannigfaltigkeit bei Verwendung des Levi-Civita-Zusammenhangs formal selbstadjungiert ist.

Kapitel 3

Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}_n$

In diesem Kapitel übertragen wir die Konstruktion symplektischer Diracoperatoren auf den komplexen projektiven Raum. Wir betrachten dazu $\mathbb{CP}_n$ als homogenen Raum SU_{n+1}/U_n und versehen ihn durch die Fubini-Study-Metrik mit der Struktur einer Kähler-Mannigfaltigkeit. Insbesondere ist SU_{n+1} ein Prinzipalbündel über $\mathbb{CP}_n$. Für ungerades n können wir dann eine metaplektische Struktur für $\mathbb{CP}_n$ definieren und das Spinorbündel als ein zu SU_{n+1} assoziiertes Vektorbündel schreiben.

3.1 Konstruktion der Fubini-Study-Metrik

Im Folgenden nummerieren wir die Komponenten von Vektoren $x \in \mathbb{C}^{n+1}$ gemäß $x = (x_0, \dots, x_n)$ und schreiben $(x_0, \dots, \widehat{x_j}, \dots, x_n)$ für den n-komponentigen Vektor, der aus x durch weglassen der Komponente x_j entsteht. Die hermitesche Standardform auf $\mathbb{C}^{n+1}$ wird mit $(\cdot|\cdot)$ bezeichnet, $\|\cdot\|$ ist die zugehörige Norm. Mit der kanonischen Identifizierung $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$ ist dann $\|\cdot\|$ die euklidsche Norm, und für die $2n+1$-dimensionale Sphäre gilt $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$.

Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}_n$ ist definiert als die Menge aller eindimensionalen komplexen Unterräume von $\mathbb{C}^{n+1}$, d. h. $\mathbb{CP}_n = \big\{\mathbb{C}x \,\big|\, x \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}\big\}$. Sei $U_j = \{\mathbb{C}x \,|\, x_j \neq 0\}$. Durch die Karten

$$\begin{aligned} \varphi_j :\ U_j &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \mathbb{C}x &\longmapsto \left(\frac{x_0}{x_j}, \dots, \widehat{\frac{x_j}{x_j}}, \dots, \frac{x_n}{x_j}\right) \end{aligned}$$

erhält $\mathbb{CP}_n$ die Struktur einer reellen, $2n$-dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Von der Sphäre S^{2n+1} haben wir dann die Projektion

$$pr :\ S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{CP}_n, \quad x \longmapsto \mathbb{C}x$$

und lokale Schnitte

$$\begin{aligned} s_j : \; U_j &\longrightarrow S^{2n+1} \\ \mathbb{C}x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|} \qquad \text{für } x_j = 1. \end{aligned}$$

Lemma 3.1 *Die Projektion pr ist eine Submersion mit*

$$\operatorname{Ker} T_x pr = \mathbb{R}ix.$$

Beweis: Die Fasern von pr sind isomorph zu S^1, es gilt $pr(x) = pr(e^{it}x)$, $t \in \mathbb{R}$. Differenzieren liefert $T_x pr(ix) = 0$, also $\mathbb{R}ix \subset \operatorname{Ker} T_x pr$. Für ein $x \in pr^{-1}(U_j)$ existiert nun ein $\lambda \in S^1$ mit $\lambda s_j(\mathbb{C}x) = x$. Zu diesem λ betrachten wir die Funktion $s = \lambda s_j$. Dann gilt $pr \circ s = id_{U_j}$ und differenzieren führt auf

$$T_x pr \circ T_{\mathbb{C}x} s = id_{T_{\mathbb{C}x}\mathbb{CP}_n}.$$

Die Tangentialabbildung $T_x pr$ ist also surjektiv, und aus Dimensionsgründen muss dann $\mathbb{R}ix = \operatorname{Ker} T_x pr$ gelten. □

Da die Punkte der Sphäre S^{2n+1} durch $(x|x) = 1$ beschrieben werden, erhält man durch differenzieren folgende Charakterisierung der Tangentialräume:

$$u \in T_x S^{2n+1} \iff \operatorname{Re}(u|x) = 0.$$

Sei $(\mathbb{C}x)^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathbb{C}x$ in $\mathbb{C}^{n+1}$ bezüglich der hermiteschen Form. Damit erhalten wir dann eine Zerlegung

$$T_x S^{2n+1} = (\mathbb{C}x)^\perp \oplus \mathbb{R}ix$$

des Tangentialraumes und aufgrund des Lemmas einen reellen Isomorphismus

$$T_x pr : \; (\mathbb{C}x)^\perp \overset{\cong}{\longrightarrow} T_{\mathbb{C}x}\mathbb{CP}_n.$$

Ein Element $\lambda \in S^1$ liefert durch Multiplikation $u \mapsto \lambda u$ einen Isomorphismus $f : (\mathbb{C}x)^\perp \to (\mathbb{C}\lambda x)^\perp$, denn es gilt $(\lambda u|\lambda x) = (u|x)$. Aus $pr(x) = pr(\lambda x)$ folgt weiter $T_x pr(u) = T_{\lambda x} pr(\lambda u)$, und wir erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} (\mathbb{C}x)^\perp \arrow[rr, "f", "\cong"'] \arrow[dr, "\cong", "T_x pr"'] & & (\mathbb{C}\lambda x)^\perp \arrow[dl, "\cong"', "T_{\lambda x} pr"] \\ & T_{\mathbb{C}x}\mathbb{CP}_n & \end{tikzcd}$$

Da die hermitesche Form unter f invariant ist, d. h. $(u|v) = (\lambda u|\lambda v)$, können wir nun durch

$$\big(T_x pr(u)\big|T_x pr(v)\big)_{\mathbb{CP}_n} = (u|v) \qquad \text{für } u, v \in (\mathbb{C}x)^\perp \tag{3.1}$$

auf jedem Tangentialraum von $\mathbb{CP}_n$ eine $\mathbb{C}$-wertige Bilinearform definieren. Der Realteil von $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ ist dann ein reelles Skalarprodukt der Tangentialräume und wird *Fubini-Study-Metrik* genannt.

3.2 $\mathbb{CP}_n$ als homogener Raum

Die spezielle unitäre Gruppe SU_{n+1} operiert transitiv auf der Sphäre S^{2n+1} durch Matrix-Vektor-Multiplikation. Mittels Projektion erhalten wir eine transitive Operation

$$g \cdot \mathbb{C}x = pr(gx) = \mathbb{C}(gx), \qquad g \in SU_{n+1},\, x \in S^{2n+1}$$

von SU_{n+1} auf $\mathbb{CP}_n$ und somit eine surjektive Abbildung

$$\begin{aligned} \pi : \ SU_{n+1} &\longrightarrow \mathbb{CP}_n \\ g &\longmapsto g \cdot \mathbb{C}x_N, \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei $x_N = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{n+1}$ ist. Der Stabilisator von $\mathbb{C}x_N$

$$H = \pi^{-1}(\mathbb{C}x_N) = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} \det Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right) \;\middle|\; Q \in U_n \right\}$$

ist dann eine abgeschlossene Untergruppe von SU_{n+1}, die Faser des Punktes $\pi(g)$ ist gH.

Satz 3.2 *Die Abbildung $\pi : SU_{n+1} \to \mathbb{CP}_n$ ist bezüglich der Rechtsaktion von H auf SU_{n+1} ein H-Prinzipalbündel über $\mathbb{CP}_n$. Insbesondere induziert π einen Diffeomorphismus*

$$\begin{aligned} f : \ SU_{n+1}/H &\xrightarrow{\cong} \mathbb{CP}_n \\ gH &\longmapsto \pi(g). \end{aligned}$$

Beweis: Nach Beispiel 1.4 ist die kanonische Projektion $\pi_1 : SU_{n+1} \to SU_{n+1}/H$ ein H-Prinzipalbündel. Wegen der lokalen Trivialität gibt es lokal einen Schnitt $U \to SU_{n+1}$ von π_1. f lässt sich auf U als Verkettung dieses Schnittes mit π darstellen und ist damit differenzierbar. Wäre jetzt π eine Submersion, so gäbe es auch einen lokalen Schnitt $V \to SU_{n+1}$ von π, und dessen Verkettung mit π_1 wäre f^{-1} und differenzierbar. Damit wäre f ein Diffeomorphismus und $\pi = f \circ \pi_1$ ein H-Prinzipalbündel.

Zeigen wir daher jetzt: π ist eine Submersion.
Für $X \in \mathfrak{su}_{n+1}$ gilt $T_e\pi(X) = T_{x_N}pr(Xx_N)$. Da $T_{x_N}pr$ den Unterraum $(\mathbb{C}x_N)^\perp$ bijektiv auf $T_{\mathbb{C}x_N}\mathbb{CP}_n$ abbildet und sich jeder Vektor aus $(\mathbb{C}x_n)^\perp$ als Xx_N mit $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\bar{u}^\top \\ u & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{su}_{n+1}$, $u \in \mathbb{C}^n$ darstellen lässt, ist $T_e\pi$ surjektiv. Unter Benutzung der Operationen von $g_0 \in SU_{n+1}$ auf SU_{n+1} und $\mathbb{CP}_n$ folgt aus $\pi(g_0 g) = g_0 \cdot \pi(g)$ die Beziehung $T_{g_0}\pi(g_0 X) = g_0 \cdot T_e\pi(X)$. Da die Operationen auf den Tangentialräumen Isomorphismen sind, haben $T_{g_0}\pi$ und $T_e\pi$ den gleichen Rang. Damit ist π eine Submersion. □

3.3 $\mathbb{CP}_n$ als Kähler-Mannigfaltigkeit

Als nächstes wollen wir das Tangentialbündel $T\mathbb{CP}_n$ als assoziiertes Vektorbündel zu SU_{n+1} darstellen, die Fubini-Study-Metrik in diesem Bündel beschreiben und durch einführen einer fast-komplexen Struktur $\mathbb{CP}_n$ zu einer Kähler-Mannigfaltigkeit machen.

Dazu fixieren wir zuerst eine Basis von $\mathfrak{su}_{n+1}$ bestehend aus den Matrizen

$$
\begin{gathered}
X_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1,0,\ldots,0 \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right), \ldots, X_n = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0,\ldots,0,-1 \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right), \\
X_{n+1} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & i,0,\ldots,0 \\ \hline \begin{smallmatrix} i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right), \ldots, X_{2n} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0,\ldots,0,i \\ \hline \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ i \end{smallmatrix} & 0 \end{array}\right), \\
Y_{jk} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & \ddots & & \\ 0 & & \begin{smallmatrix} 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & \ddots \end{array}\right), \; Z_{jk} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & \ddots & & \\ 0 & & \begin{smallmatrix} 0 & \cdots & i \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ i & \cdots & 0 \end{smallmatrix} & \\ & & & \ddots \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow\text{j. Zeile} \\ \leftarrow\text{k. Zeile} \end{array}, \; 1 \le j < k \le n, \\
Y_j = \sqrt{\tfrac{2}{j(j+1)}} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -ji & & \\ & & & i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & i \end{pmatrix} \Big\}\text{j mal}, \quad j = 1, \ldots, n.
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

Man verifiziert dann leicht, dass durch die symmetrische Bilinearform

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Spur}(AB) \tag{3.4}$$

ein reelles Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}_{n+1}$ gegeben ist, bezüglich dessen die oben definierte Basis eine Orthonormalbasis ist. Offenbar bilden die Matrizen Y_{jk}, Z_{jk}, Y_j eine Basis der Liealgebra

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} -\operatorname{Spur} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \;\middle|\; A \in \mathfrak{u}_n \right\}$$

von H, und wenn wir mit $\mathfrak{m}$ den von $X_1, \ldots, X_{2n}$ aufgespannten Unterraum bezeichnen, ist

$$\mathfrak{su}_{n+1} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h} \tag{3.5}$$

eine orthogonale Zerlegung der Liealgebra von SU_{n+1}. Nun definieren wir durch die Vorschrift $JX_j = X_{n+j}$, $JX_{n+j} = -X_j$ auf $\mathfrak{m}$ eine komplexe Struktur $J : \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$, die $\mathfrak{m}$ zu einem $\mathbb{C}$-Vektorraum macht. Die Identifikation

$$\mathbb{C}^n \;\cong\; \mathfrak{m} \qquad \text{per} \qquad u \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\bar{u}^\top \\ \hline u & 0 \end{array}\right) \tag{3.6}$$

ist dann ein komplexer Isomorphismus, mittels dessen wir die hermitesche Standardform auf $\mathfrak{m}$ übertragen können. Das so definierte komplexe Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)_\mathfrak{m}$ hat $X_1, \ldots, X_n$ als hermitesche Basis, und die in (3.4) definierte Spurform auf $\mathfrak{m}$ ist gerade der Realteil von $(\cdot|\cdot)_\mathfrak{m}$.

Da π eine Submersion ist und gH die Faser eines Punktes $p = \pi(g)$, gilt $\operatorname{Ker} T_g\pi = g\mathfrak{h}$, und wir erhalten einen Isomorphismus

$$T_g\pi : \; g\mathfrak{m} \xrightarrow{\cong} T_p\mathbb{CP}_n. \tag{3.7}$$

Bei einem Wechsel von g zu gh in der Faser, d. h. $h \in H$, hat man nun $\pi(g) = \pi(gh)$ und daher

$$T_g\pi(gX) = T_{gh}\pi(gXh) = T_{gh}\pi(gh\,\mathrm{Ad}(h^{-1})X), \tag{3.8}$$

wobei $X \in \mathfrak{su}_{n+1}$ und $\mathrm{Ad}(h)X = hXh^{-1}$ die adjungierte Darstellung ist.

Satz 3.3 *Die adjungierte Darstellung der Isotropiegruppe H operiert auf $\mathfrak{m}$ als unitäre Darstellung*

$$\begin{aligned} \alpha:\ H &\longrightarrow U(\mathfrak{m}) \\ h &\longmapsto \mathrm{Ad}(h). \end{aligned}$$

Für $h = \left(\begin{array}{c|c} \det Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$ erhält man bezüglich $(X_1, \ldots, X_n)$ die Matrixdarstellung

$$\alpha(h) = \det Q \cdot Q.$$

Beweis: Für $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\bar{u}^\top \\ u & 0 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{m}$ gilt

$$\begin{aligned} \alpha(h)X = hXh^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\det Q^{-1} \cdot \bar{u}^\top \\ \hline Qu & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \det Q & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c} 0 & -\det Q^{-1} \cdot \bar{u}^\top Q^{-1} \\ \hline \det Q \cdot Qu & 0 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Aus

$$-\overline{\det Q \cdot Qu}^\top = -\overline{\det Q} \cdot \bar{u}^\top \bar{Q}^\top = -\det Q^{-1} \cdot \bar{u}^\top Q^{-1}$$

folgt $\alpha(h)X \in \mathfrak{m}$, und aus der Definition der Form $(\cdot|\cdot)_\mathfrak{m}$ über die Identifikation (3.6) erhält man $\alpha(h) \in U(\mathfrak{m})$ und die behauptete Matrixdarstellung. □

Wegen (3.7) und (3.8) erhalten wir nun eine Beschreibung von $T\mathbb{CP}_n$ als zur Darstellung α assoziiertem Vektorbündel durch

$$\begin{array}{ccc} SU_{n+1} \times_\alpha \mathfrak{m} & \xrightarrow{\cong} & T\mathbb{CP}_n \\ {[g, X]} & \longmapsto & T_g\pi(gX). \end{array} \tag{3.9}$$

Außerdem können wir auf jedem Tangentialraum von $\mathbb{CP}_n$ durch

$$J_{\mathbb{CP}_n} T_g\pi(gX) = T_g\pi(gJX), \qquad X \in \mathfrak{m} \tag{3.10}$$

eine komplexe Struktur $J_{\mathbb{CP}_n}$ definieren. Da $\alpha(h) \in U(\mathfrak{m})$ insbesondere $\mathbb{C}$-linear ist, ist $J_{\mathbb{CP}_n}$ damit wohldefiniert.

Satz 3.4 *Die Bilinearform* $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ *und das Endomorphismenfeld* $J_{\mathbb{CP}_n}$ *werden in den Tensorbündeln*

$$SU_{n+1} \times_{\alpha^{-*}\otimes\alpha^{-*}} \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^* \qquad bzw. \qquad SU_{n+1} \times_{\alpha^{-*}\otimes\alpha} \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}$$

dargestellt durch die konstanten Abbildungen

$$g \longmapsto (\cdot|\cdot)_{\mathfrak{m}} \qquad bzw. \qquad g \longmapsto J.$$

Insbesondere gilt

$$\big(T_g\pi(gX)\big|T_g\pi(gY)\big)_{\mathbb{CP}_n} = (X|Y)_{\mathfrak{m}} \qquad \textit{für } X, Y \in \mathfrak{m}.$$

Beweis: Wir betrachten die Identifikationen

$$\begin{array}{ccc} SU_{n+1} \times_{\alpha^{-*}\otimes\alpha^{-*}} \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m}^* & \xrightarrow{\cong} & T^{(2,0)}\mathbb{CP}_n \\ [g, F] & \longmapsto & \big((T_g\pi(X), T_g\pi(Y)) \mapsto F(X \otimes Y)\big) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} SU_{n+1} \times_{\alpha^{-*}\otimes\alpha} \mathfrak{m}^* \otimes \mathfrak{m} & \xrightarrow{\cong} & T^{(1,1)}\mathbb{CP}_n \\ [g, F] & \longmapsto & \big(T_g\pi(X) \mapsto T_g\pi \circ F(X)\big). \end{array}$$

Aus (3.10) folgt sofort, dass $J_{\mathbb{CP}_n}$ durch $g \mapsto J$ dargestellt wird. Betrachten wir jetzt zwei Elemente $X = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\bar{u}^\top \\ u & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\bar{v}^\top \\ v & 0 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathfrak{m}$ und $x = gx_N$, $g \in SU_{n+1}$. Dann gilt $(gXx_N|x) = (Xx_N|x_N) = 0$, also $gXx_N \in (\mathbb{C}x)^\perp$; ebenso $gYx_N \in (\mathbb{C}x)^\perp$. Mit der Definition (3.1) von $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ folgt

$$\begin{aligned} \big(T_g\pi(gX)\big|T_g\pi(gY)\big)_{\mathbb{CP}_n} &= \big(T_x pr(gXx_N)\big|T_x pr(gYx_N)\big)_{\mathbb{CP}_n} = (gXx_N|gYx_N) \\ &= (Xx_N|Yx_N) = (u|v)_{\mathbb{C}^n} = (X|Y)_{\mathfrak{m}}. \end{aligned}$$

Daher wird $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ durch $g \mapsto (\cdot|\cdot)_{\mathfrak{m}}$ dargestellt. □

Bemerkung 3.5 Aufgrund der Differenzierbarkeit ist $J_{\mathbb{CP}_n}$ eine fast-komplexe Struktur und die Bilinearform $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ eine hermitesche Form auf $\mathbb{CP}_n$. Der Realteil γ von $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$, die Fubini-Study-Metrik, ist eine riemannsche Metrik, der negative Imaginärteil ω eine alternierende 2-Form, und es gilt

$$\gamma(\xi, \eta) = \omega(\xi, J_{\mathbb{CP}_n}\eta).$$

Die Vektoren $T_g\pi(gX_1), \dots, T_g\pi(gX_{2n})$ bilden bezüglich γ eine Orthonormalbasis von $T_{\pi(g)}\mathbb{CP}_n$ und eine symplektische Basis bezüglich ω. □

Wir wollen jetzt einen Zusammenhang auf dem Prinzipalbündel $\pi : SU_{n+1} \to \mathbb{CP}_n$ definieren. Da $g\mathfrak{h} = \operatorname{Ker} T_g\pi$ der vertikale Unterraum von $T_gSU_{n+1} = g\mathfrak{m} \oplus g\mathfrak{h}$ ist, können wir $g\mathfrak{m}$ als horizontalen Unterraum definieren. Die entsprechende 1-Form des Zusammenhangs wäre dann

$$\begin{aligned} Z :\ & TSU_{n+1} \longrightarrow \mathfrak{h} \\ & gX + gY \longmapsto Y \qquad \text{für } X \in \mathfrak{m},\ Y \in \mathfrak{h}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Satz 3.6 *Die Abbildung Z definiert eine Zusammenhangs-1-Form des Prinzipalbündels π. Die zugehörige kovariante Ableitung ∇ ist torsionsfrei und erfüllt*

$$\nabla(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n} = 0 \qquad \textit{und} \qquad \nabla J_{\mathbb{CP}_n} = 0.$$

Beweis: Wir überprüfen zuerst die Eigenschaften aus Definition 1.9 für Z: Offenbar gilt $Z(gY) = Y$ für $Y \in \mathfrak{h}$ und

$$\begin{aligned} Z\big((gX + gY)h\big) &= Z\big(gh \underbrace{\mathrm{Ad}(h^{-1})X}_{\in\mathfrak{m}} + gh \underbrace{\mathrm{Ad}(h^{-1})Y}_{\in\mathfrak{h}}\big) \\ &= \mathrm{Ad}(h^{-1})Y = \mathrm{Ad}(h^{-1})Z(gX + gY) \end{aligned}$$

für ein Element $gX + gY \in T_g SU_{n+1}$, $X \in \mathfrak{m}$, $Y \in \mathfrak{h}$. Für die Differenzierbarkeit von Z beweisen wir (vergleiche Beispiel 1.8), dass für jedes Vektorfeld $\xi : SU_{n+1} \to TSU_{n+1}$ die Komposition $Z\circ\xi$ wieder differenzierbar ist. Nun ist ξ darstellbar als $\xi(g) = gu(g)$ mit einer differenzierbaren Abbildung $u : SU_{n+1} \to \mathfrak{su}_{n+1}$. Mit der Zerlegung $u(g) = u_{\mathfrak{m}}(g) + u_{\mathfrak{h}}(g) \in \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ ist dann $Z \circ \xi = u_{\mathfrak{h}}$ wieder differenzierbar.
Da die Tensorfelder $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ und $J_{\mathbb{CP}_n}$ in den entsprechenden Bündeln durch konstante Abbildungen dargestellt werden, ist nach Definition 1.10 ihre kovariante Ableitung gleich null.
Jetzt zur Torsionsfreiheit: Sei $\tau : U \to SU_{n+1}$ ein lokaler Schnitt von π. Setzen wir

$$\beta(g) = \mathrm{Ad}(g^{-1}\tau \circ \pi(g)),$$

so gilt für $h \in H$ die Beziehung $\beta(gh) = \mathrm{Ad}(h^{-1})\beta(g)$. Für jedes $X \in \mathfrak{m}$ ist daher durch die α-äquivariante Abbildung $u_X : g \mapsto \beta(g)X$ ein lokales Vektorfeld

$$\xi_X : \pi(g) \longmapsto T_g\pi(g\beta(g)X)$$

auf U definiert. Seien ξ_X, ξ_Y zwei solche Vektorfelder. Dann ist $g\beta(g)X$ der horizontale Lift von $\xi_X(\pi(g))$, und die kovariante Ableitung ist im Vektorbündel gegeben durch

$$\nabla_{\xi_X(\pi(g))}\xi_Y \cong du_Y(g\beta(g)X) = T\beta(g\beta(g)X)Y.$$

Für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ und $w = f \circ \pi$ gilt

$$\xi_Y f(\pi(g)) = df\big(\xi_Y(\pi(g))\big) = dw(g\beta(g)Y)$$

und weiter

$$\xi_X\xi_Y f(\pi(g)) = d^2w(g\beta(g)X, g\beta(g)Y) + dw\big(g \underbrace{\beta(g)X\beta(g)Y}_{\beta(g)XY} + gT\beta(g\beta(g)X)Y\big).$$

Nun ist für $X, Y \in \mathfrak{m}$ der Kommutator $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, siehe auch (4.3). Daher ist $\beta(g)[X, Y] \in \mathfrak{h}$ und somit $dw(g\beta(g)[X, Y]) = 0$. Für die Lieklammer von ξ_X und ξ_Y gilt damit

$$[\xi_X, \xi_Y]f(\pi(g)) = dw\big(gT\beta(g\beta(g)X)Y - gT\beta(g\beta(g)Y)X\big),$$

und das entsprechende Vektorfeld wird durch

$$[\xi_X, \xi_Y](\pi(g)) \cong T\beta(g\beta(g)X)Y - T\beta(g\beta(g)Y)X$$

dargestellt. Für den Torsionstensor gilt somit

$$T(\xi_X(p), \xi_Y(p)) = \nabla_{\xi_X(p)}\xi_Y - \nabla_{\xi_Y(p)}\xi_X - [\xi_X, \xi_Y](p) = 0,$$

und das zeigt die Behauptung, da $\xi_X(p)$ jeden Vektor aus $T_p\mathbb{CP}_n$ darstellen kann. □

Bemerkung 3.7 Wegen $\nabla(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n} = 0$ verschwindet auch die kovariante Ableitung der Fubini-Study-Metrik, und daher ist ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Aus $\nabla J_{\mathbb{CP}_n} = 0$ folgt, siehe [9], dass $\mathbb{CP}_n$ mit $(\cdot|\cdot)_{\mathbb{CP}_n}$ und $J_{\mathbb{CP}_n}$ eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist. Insbesondere ist dann $d\omega = 0$, d. h. ω ist eine symplektische Form.

3.4 Metaplektische Struktur von $\mathbb{CP}_n$

Eine metaplektische Struktur ist eine Reduktion des Sp_{2n}-Prinzipalbündels der symplektischen Basen der Tangentialräume. Zur Definition einer metaplektischen Struktur auf $\mathbb{CP}_n$ benötigen wir daher zunächst eine Beschreibung von $Sp(\mathbb{CP}_n)$.

Nach Bemerkung 3.5 ist für jedes $g \in SU_{n+1}$ $E_g = \big(T_g\pi(gX_1), \ldots, T_g\pi(gX_{2n})\big)$ eine symplektische Basis. Fassen wir wie in Beispiel 1.2 jede solche Basis als einen Isomorphismus $\mathbb{R}^{2n} \to T_{\pi(g)}\mathbb{CP}_n$ auf, so lässt sich eine beliebige symplektische Basis von $T_{\pi(g)}\mathbb{CP}_n$ als $E_g \circ B$ mit $B \in Sp_{2n}$ schreiben. Weiter gilt wegen $T_g\pi(gX) = T_{gh}\pi(gh\alpha(h^{-1})X)$ die Gleichung $E_g = E_{gh} \circ \alpha(h^{-1})$. Wir benutzen dabei die Identifikation $\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, so dass $\alpha(h) \in U_n$ und U_n eine Untergruppe von Sp_{2n} ist. Insgesamt erhalten wir damit einen Isomorphismus von dem zu α assoziierten Sp_{2n}-Prinzipalbündel (siehe Beispiel 1.15) nach $Sp(\mathbb{CP}_n)$:

$$\begin{array}{ccc} SU_{n+1} \times_\alpha Sp_{2n} & \stackrel{\cong}{\longrightarrow} & Sp(\mathbb{CP}_n) \\ {[g, B]} & \longmapsto & E_g \circ B \end{array} \tag{3.12}$$

Eine metaplektische Struktur werden wir als assoziiertes Mp_{2n}-Prinzipalbündel $SU_{n+1} \times_{\tilde{\alpha}} Mp_{2n}$ konstruieren, wobei ein Lift $\tilde{\alpha} : H \to Mp_{2n}$ von α in die metaplektische Gruppe benötigt wird. Zusätzlich zu $\mathfrak{m} \cong \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ benutzen wir jetzt die Identifikation

$$U_n \;\cong\; H \qquad \text{per} \qquad Q \;\longmapsto\; \left(\begin{array}{c|c} \det Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right). \tag{3.13}$$

Nach Satz 3.3 ist α dann ein Homomorphismus $U_n \to U_n,\ Q \mapsto \det Q \cdot Q$. Nun kann man jedes $Q \in U_n$ schreiben als $Q = \lambda V$ mit $\lambda \in U_1$ und $V \in SU_n$. Diese Zerlegung ist allerdings nicht eindeutig, denn man kann ein beliebiges λ mit $\det Q = \lambda^n$ wählen. Jedenfalls ergibt sich sofort das folgende

Lemma 3.8 *Die Darstellung der Isotropiegruppe hat die Form*

$$\begin{aligned} \alpha : \ U_n &\longrightarrow U_n \\ \lambda V &\longmapsto \lambda^{n+1} V, \qquad \lambda \in U_1,\ V \in SU_n \end{aligned}$$

□

Wir berechnen jetzt die Form der Überlagerungsabbildung $\varrho : Mp_{2n} \to Sp_{2n}$ eingeschränkt auf $\varrho^{-1}(U_n)$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} U_1 \times SU_n &\longrightarrow U_n \\ (\lambda, V) &\longmapsto \lambda^2 V \end{aligned}$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, und sein Kern ist $\{(\zeta, \zeta^{-2} I) \mid \zeta^{2n} = 1\}$, denn aus $\lambda^2 V = I$ folgt $V = \lambda^{-2} I$ sowie $\det(\lambda^2 V) = \lambda^{2n} = 1$. Die Untergruppe

$$A = \{(\zeta, \zeta^{-2} I) \mid \zeta^n = 1\}$$

ist dann von Ordnung 2 im Kern und durch Quotientenbildung erhält man eine zweifache, zusammenhängende Überlagerung

$$U_1 \times SU_n \big/ A \ \longrightarrow\ U_n.$$

Satz 3.9 *Die Untergruppe $\varrho^{-1}(U_n)$ von Mp_{2n} ist isomorph zu $U_1 \times SU_n/A$, und die Überlagerungsabbildung ist von der Form*

$$\begin{aligned} \varrho :\ \varrho^{-1}(U_n) \cong U_1 \times SU_n \big/ A &\longrightarrow U_n \\ [\lambda, V] \qquad &\longmapsto \lambda^2 V. \end{aligned}$$

Beweis: Da zusammenhängende Überlagerungen zur selben charakteristischen Untergruppe bis auf Isomorphie eindeutig sind, ist nur zu zeigen, dass $\varrho^{-1}(U_n)$ zusammenhängend ist. Wir benutzen dazu die Polarzerlegung invertierbarer Matrizen: Sie ist durch die bijektive Abbildung

$$\begin{array}{ccc} O_{2n} \times \mathrm{Sym}_{2n} & \xrightarrow{\cong} & Gl_{2n}(\mathbb{R}) \\ (Q, A) & \longmapsto & Q \exp(A) \end{array}$$

gegeben, wobei Sym_{2n} die Menge der symmetrischen $2n \times 2n$-Matrizen bezeichnet. In [7, Seite 175] wird gezeigt, dass diese Abbildung ein Diffeomorphismus ist. Nach Wallach [14, Seite 211] schränkt sie sich auf die symplektischen Matrizen ein, und wir erhalten mit $U_n \cong O_{2n} \cap Sp_{2n}$ einen Diffeomorphismus

$$U_n \times \left(\mathrm{Sym}_{2n} \cap \mathfrak{sp}_{2n}\right) \ \cong\ Sp_{2n}.$$

Daher ist jeder Weg in Sp_{2n} homotop zu einem Weg in U_n, und da die Fundamentalgruppe $\pi_1(Sp_{2n})$ transitiv auf Mp_{2n} operiert, operiert auch $\pi_1(U_n)$ transitiv auf $\varrho^{-1}(U_n)$, d. h. $\varrho^{-1}(U_n)$ ist zusammenhängend. □

Satz 3.10 *Für ungerades $n = 2m - 1$ existiert ein Lift $\tilde{\alpha}$ der Isotropiedarstellung*

$$\begin{tikzcd} & U_1 \times SU_n/A \arrow[d, "\varrho"] \\ U_n \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"'] & U_n \end{tikzcd}$$

und ist von der Form $\tilde{\alpha}(\lambda V) = [\lambda^m, V]$ mit $\lambda \in U_1$, $V \in SU_n$.

Beweis: Wir möchten $\tilde{\alpha}$ durch die obige Zuordnungsvorschrift definieren. Nach Lemma 3.8 und Satz 3.9 wäre dann $\alpha = \varrho \circ \tilde{\alpha}$. Wegen der Nichteindeutigkeit der Zerlegung $\lambda V \in U_n$ ist noch zu prüfen, ob die Definition korrekt ist. Sei dazu $\lambda V = I$, also $\lambda^n = 1$. Dann ist $\lambda^{-2m} = \lambda^{-n-1} = \lambda^{-1}$, also $(\lambda^m, V) = \big(\lambda^m, (\lambda^m)^{-2} I\big) \in A$, und das heißt, $[\lambda^m, V]$ ist das neutrale Element von $U_1 \times SU_n/A$. □

Satz 3.11 *Der komplexe projektive Raum $\mathbb{CP}_n$ ungerader Dimension $n = 2m - 1$ besitzt eine metaplektische Struktur, die durch*

$$\begin{aligned} f: \ SU_{n+1} \times_{\tilde{\alpha}} Mp_{2n} &\longrightarrow SU_{n+1} \times_\alpha Sp_{2n} \\ [g, B] &\longmapsto [g, \varrho(B)] \end{aligned}$$

gegeben ist.

Beweis: Die Abbildung ist wohldefiniert, da für $h \in H$

$$[gh, \varrho(\tilde{\alpha}(h^{-1})B)] = [gh, \underbrace{\varrho \circ \tilde{\alpha}}_{\alpha}(h^{-1})\varrho(B)] = [g, \varrho(B)]$$

gilt. Wegen

$$f([g, B]C) = f([g, BC]) = [g, \varrho(B)\varrho(C)] = f([g, B])\varrho(C) \qquad \text{für } B, C \in Mp_{2n}$$

ist f eine Reduktion bezüglich ϱ, also eine metaplektische Struktur. □

Gemäß Beispiel 1.15 gibt es Reduktionen d_1, d_2 der assoziierten Prinzipalbündel auf das Prinzipalbündel SU_{n+1} von $\mathbb{CP}_n$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & SU_{n+1} \times_{\tilde{\alpha}} Mp_{2n} \arrow[d, "f"] \\ SU_{n+1} \arrow[ur, "d_2"] \arrow[r, "d_1"'] & SU_{n+1} \times_\alpha Sp_{2n} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Das Spinorbündel $Q = \big(SU_{n+1} \times_{\tilde{\alpha}} Mp_{2n}\big) \times_L L^2(\mathbb{R}^n)$ reduziert sich dann über d_2 zu

$$Q = SU_{n+1} \times_{L \circ \tilde{\alpha}} L^2(\mathbb{R}^n).$$

Für das zum Schwartzraum gehörende Teilbündel S von Q erhält man

$$S = SU_{n+1} \times_{L \circ \tilde{\alpha}} S(\mathbb{R}^n).$$

Außerdem wird der in (3.11) definierte Zusammenhang durch das Diagramm so auf die assoziierten Bündel übertragen, dass die entstehenden Zusammenhänge entsprechend den Abbildungen d_1, d_2, f Reduktionen voneinander sind. Für die Spinorableitung eines durch die $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildung $u : SU_{n+1} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ beschriebenen Schnittes $\varphi \in \Gamma(Q)$ in Richtung des Vektors $\xi = T_g\pi(gX)$, $X \in \mathfrak{m}$ gilt dann

$$\nabla_\xi \varphi = [g, du(gX)], \tag{3.14}$$

da ja gX der horizontale Lift von ξ ist.

Schließlich wollen wir noch die Cliffordmultiplikation eines Tangentialvektors mit einem Spinor

$$\varphi = [g, u] \in SU_{n+1} \times_{L\circ\tilde{\alpha}} S(\mathbb{R}^n)$$

berechnen. Da die Vektoren $(\xi_1, \ldots, \xi_{2n})$ mit $\xi_j = T_g\pi(gX_j)$ nach Bemerkung 3.5 eine symplektische Basis von $T_{\pi(g)}\mathbb{CP}_n$ bilden, erhalten wir

$$\xi_j \cdot \varphi = [g, X_j \cdot u], \tag{3.15}$$

wobei

$$X_j \cdot u = \begin{cases} ix_j u & , \ j = 1, \ldots, n \\ \frac{\partial}{\partial x_{j-n}} u & , \ j = n+1, \ldots, 2n \end{cases}$$

gilt.

Kapitel 4

Berechnung der Operatoren D, $\tilde{D}$ und P

Ausgehend von der im letzten Kapitel bestimmten Form $Q = SU_{n+1} \times_{L\circ\tilde{\alpha}} L^2(\mathbb{R}^n)$ des Spinorbündels können wir jetzt die symplektischen Diracoperatoren D und $\tilde{D}$ von $\mathbb{CP}_n$ ermitteln. Für den Operator 2. Ordnung $P = i(\tilde{D}D - D\tilde{D})$ berechnen wir eine Formel, die den Casimiroperator von SU_{n+1} und den Operator des harmonischen Oszillators auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ enthält.

4.1 Berechnung der Diracoperatoren

Jeder Schnitt des Spinorbündels von $\mathbb{CP}_n$ wird eindeutig durch eine $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildung $u : SU_{n+1} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ beschrieben. Daher können wir im Folgenden $D, \tilde{D}$ und P als Operatoren betrachten, die auf diesen äquivarianten Abbildungen wirken.

Satz 4.1 *Wir betrachten einen differenzierbaren Schnitt des Spinorbündels, dargestellt durch die $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildung $u : SU_{n+1} \to S(\mathbb{R}^n)$. Die Diracoperatoren sind dann von der Form*

$$\begin{aligned} Du,\, \tilde{D}u :\ SU_{n+1} &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ Du &= \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot X_{n+j}(u) - X_{n+j} \cdot X_j(u) \\ \tilde{D}u &= \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot X_j(u) + X_{n+j} \cdot X_{n+j}(u), \end{aligned}$$

mit der Notation $X_j(u) : SU_{n+1} \to S(\mathbb{R}^n)$, $g \mapsto du(gX_j)$.

Beweis: Die Spinorableitung von u an einer Stelle g ist nach (3.14) durch die lineare Abbildung $X \mapsto du(gX)$ gegeben. Sie lässt sich daher als

$$\sum_{j=1}^{2n} X_j^* \otimes du(gX_j) \ \in \ \mathfrak{m}^* \otimes S(\mathbb{R}^n)$$

schreiben, wobei $(X_1^*, \dots, X_{2n}^*)$ die duale Basis von $(X_1, \dots, X_{2n})$ ist. Die Identifikation von $\mathfrak{m}$ mit $\mathfrak{m}^*$ gemäß (2.7, 2.8) liefert

$$X_j \longmapsto X_{n+j}^*, \quad X_{n+j} \longmapsto -X_j^*$$

für die symplektische Form bzw.

$$X_j \longmapsto X_j^*, \quad X_{n+j} \longmapsto X_{n+j}^*$$

für die riemannsche Metrik. Nach Definition 2.7 der Diracoperatoren haben diese dann die Form

$$\begin{aligned} Du(g) &= \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot du(gX_{n+j}) - X_{n+j} \cdot du(gX_j) \\ \tilde{D}u(g) &= \sum_{j=1}^{n} X_j \cdot du(gX_j) + X_{n+j} \cdot du(gX_{n+j}). \end{aligned}$$

□

4.2 Berechnung des Operators P

Ausgehend von den im letzten Abschnitt ermittelten Formeln für die Diracoperatoren wollen wir jetzt die Form des Operators $P = i(\tilde{D}D - D\tilde{D})$ und seinen Definitionsbereich bestimmen. Zur Vereinfachung der Darstellung benutzen wir dabei die symplektische Cliffordalgebra sC($\mathfrak{m}$) von $\mathfrak{m}$ mit der aus den Elementen $e_j = X_j$, $f_j = X_{n+j}$ bestehenden symplektischen Basis (vergleiche Bemerkung 3.5). Insbesondere gilt dann für die Cliffordmultiplikation (3.15)

$$X \cdot Y \cdot u - Y \cdot X \cdot u = [X, Y] \cdot u, \qquad X, Y \in \mathfrak{m}$$

und

$$[e_j, e_k] \cdot u = [f_j, f_k] \cdot u = 0, \quad [e_j, f_k] \cdot u = -i\delta_{jk} u.$$

Wir betrachten jetzt einen endlichdimensionalen, $L \circ \tilde{\alpha}$-invarianten Unterraum $V \subset S(\mathbb{R}^n)$ und dazu das Teilbündel

$$SU_{n+1} \times_{L \circ \tilde{\alpha}} V$$

des Spinorbündels. Ein differenzierbarer Schnitt dieses Teilbündels ist gegeben durch eine $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariante, differenzierbare Abbildung $u: \ SU_{n+1} \to V$. Wie in Satz 4.1

verwenden wir die Notation $X(u)$ für die Abbildung $g \mapsto du(gX)$. Da für $Y \in \mathfrak{m}$ die Cliffordmultiplikation $Y \cdot u = \sigma(Y) \circ u$ nur auf dem endlichdimensionalen Teilraum V operiert, ist sie stetig, und es gilt $X(Y \cdot u) = Y \cdot X(u)$. Aus

$$Du = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot X_{n+j}(u) - f_j \cdot X_j(u), \quad \tilde{D}u = \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot X_k(u) + f_k \cdot X_{n+k}(u)$$

berechnen wir dann

$$\begin{aligned} \tilde{D}Du = \sum_{j,k=1}^{n} & e_k \cdot e_j \cdot X_k(X_{n+j}(u)) - e_k \cdot f_j \cdot X_k(X_j(u)) \\ & + f_k \cdot e_j \cdot X_{n+k}(X_{n+j}(u)) - f_k \cdot f_j \cdot X_{n+k}(X_j(u)), \\ D\tilde{D}u = \sum_{j,k=1}^{n} & e_j \cdot e_k \cdot X_{n+j}(X_k(u)) + e_j \cdot f_k \cdot X_{n+j}(X_{n+k}(u)) \\ & - f_j \cdot e_k \cdot X_j(X_k(u)) - f_j \cdot f_k \cdot X_j(X_{n+k}(u)). \end{aligned}$$

Insbesondere liegt u im Definitionsbereich der Operatoren $\tilde{D}D$ und $D\tilde{D}$. Durch Einfügen passender Terme erhält man nun

$$\begin{aligned} & (\tilde{D}D - D\tilde{D})u \\ & = \sum_{j,k=1}^{n} [e_k, e_j] \cdot X_k(X_{n+j}(u)) + e_j \cdot e_k \cdot (X_k(X_{n+j}(u)) - X_{n+j}(X_k(u))) \\ & \quad + [f_j, e_k] \cdot X_k(X_j(u)) - f_j \cdot e_k \cdot (X_k(X_j(u)) - X_j(X_k(u))) \\ & \quad + [f_k, e_j] \cdot X_{n+k}(X_{n+j}(u)) + e_j \cdot f_k \cdot (X_{n+k}(X_{n+j}(u)) - X_{n+j}(X_{n+k}(u))) \\ & \quad + [f_j, f_k] \cdot X_{n+k}(X_j(u)) - f_j \cdot f_k \cdot (X_{n+k}(X_j(u)) - X_j(X_{n+k}(u))). \end{aligned}$$

Da für die Ableitung von $X(u)$ die Formel

$$d(X(u))(gY) = d^2u(gY, gX) + du(gYX)$$

gilt, folgt

$$Y(X(u)) - X(Y(u)) : \; g \mapsto du(g[Y, X]),$$

und damit erhalten wir:

Lemma 4.2 *Sei V ein endlichdimensionaler, $L \circ \tilde{\alpha}$-invarianter Unterraum von $S(\mathbb{R}^n)$. Dann gehört $\Gamma(SU_{n+1} \times_{L \circ \tilde{\alpha}} V)$ zum Definitionsbereich von $\tilde{D}D - D\tilde{D}$, und es gilt*

$$\begin{aligned} (\tilde{D}D - D\tilde{D})u = i & \sum_{j=1}^{n} X_j(X_j(u)) + X_{n+j}(X_{n+j}(u)) \\ & + \sum_{j,k=1}^{n} f_j \cdot e_k \cdot [X_j, X_k](u) - e_j \cdot f_k \cdot [X_{n+j}, X_{n+k}](u) \\ & \qquad + f_j \cdot f_k \cdot [X_j, X_{n+k}](u) + e_j \cdot e_k \cdot [X_k, X_{n+j}](u) \end{aligned} \tag{4.1}$$

für $u : SU_{n+1} \to V$ differenzierbar und $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariant. □

Um die Terme der Form $[X_j, X_k](u)$ zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Kommutatoren der Matrizen $X_1, \ldots, X_{2n}$. Dazu definieren wir zusätzlich zu den Elementen $Y_{jk}, Z_{jk}, Y_j \in \mathfrak{su}_{n+1}$ aus (3.3) noch $Z_{jj} \in \mathfrak{su}_{n+1}$ durch

$$Z_{jj} = \left(\begin{array}{c|cccc} -2i & & 0 & & \\ \hline & 0 & & & \\ 0 & & \ddots & & \\ & & & 2i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{array}\right)_{\leftarrow \text{j. Position}}, \; j = 1, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Durch einfache Rechnung erhält man dann

$$\begin{aligned} [X_j, X_k] = [X_{n+j}, X_{n+k}] &= Y_{jk} \qquad \text{für } j < k \text{ und} \\ [X_j, X_{n+k}] = [X_k, X_{n+j}] &= Z_{jk} \qquad \text{für } j \leq k. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Desweiteren bestimmen wir die Form des Differentials $\alpha_* : \mathfrak{h} \to \mathfrak{sp}(\mathfrak{m})$ der Isotropiedarstellung und benutzen dafür den durch die adjungierte Darstellung der Cliffordalgebra gegebenen Isomorphismus $\mathrm{ad} : \mathfrak{mp}(\mathfrak{m}) \to \mathfrak{sp}(\mathfrak{m})$, siehe Abschnitt 2.1.

Lemma 4.3 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \alpha_*(Y_{jk}) &= \mathrm{ad}(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k) \\ \alpha_*(Z_{jk}) &= \mathrm{ad}(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k) \end{aligned} \qquad \textit{für } 1 \leq j < k \leq n$$

und

$$\alpha_*(Z_{jj}) = \mathrm{ad}\Big(e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j + \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot e_k + f_k \cdot f_k\Big) \qquad \textit{für } j = 1, \ldots, n,$$

sowie

$$\alpha_*(Y_j) = \sqrt{\frac{1}{2j(j+1)}}\,\mathrm{ad}\Big(-j(e_{n-j}e_{n-j} + f_{n-j}f_{n-j}) + \sum_{k=n-j+1}^{n} e_k e_k + f_k f_k\Big)$$

für $j = 1, \ldots, n-1$ *und*

$$\alpha_*(Y_n) = \sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,\mathrm{ad}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\Big).$$

Beweis: Nach Lemma 3.8 hat die Darstellung der Isotropiegruppe die Form

$$\alpha : \left(\begin{array}{c|c} \lambda^{-n} & 0 \\ \hline 0 & \lambda V \end{array}\right) \longmapsto \lambda^{n+1} V, \qquad \lambda \in U_1,\ V \in SU_n,$$

ihr Differential ist daher durch

$$\begin{aligned} \alpha_* : \left(\begin{array}{c|c} -nix & 0 \\ \hline 0 & ixI \end{array}\right) &\longmapsto (n+1)ixI \qquad && \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und} \\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) &\longmapsto A && \text{für } A \in \mathfrak{su}_{n+1} \end{aligned}$$

gegeben. Die Bilder von α und α_* aus $U(\mathfrak{m})$ bzw. $\mathfrak{u}(\mathfrak{m})$ werden dabei jeweils durch $n \times n$-Matrizen bezüglich der komplexen Basis $e_1, \dots, e_n$ von $\mathfrak{m}$ dargestellt, I bezeichnet die Einheitsmatrix. Es folgt dann

$$\alpha_*(Y_{jk}) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & \cdots & -1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad \alpha_*(Z_{jk}) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & \cdots & i & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & i & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow\text{j. Zeile} \\ \\ \leftarrow\text{k. Zeile} \\ \\ \end{array}$$

für $1 \le j < k \le n$ und

$$\alpha_*(Y_j) = \sqrt{\tfrac{2}{j(j+1)}} \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -ji & & \\ & & & i & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\text{n-j. Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

für $j = 1, \dots, n-1$. Aus

$$Y_n = \sqrt{\tfrac{2}{n(n+1)}} \left(\begin{array}{c|c} -ni & 0 \\ \hline 0 & iI \end{array} \right)$$

erhalten wir

$$\alpha_*(Y_n) = \sqrt{\frac{2(n+1)}{n}}\, iI,$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2i & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{n} iI + \begin{pmatrix} -\frac{2}{n}i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{n-1}{n}2i & \\ & & & \ddots \\ & & & & -\frac{2}{n}i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow\text{j. Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

liefert schließlich

$$\alpha_*(Z_{jj}) = \frac{2(n+1)}{n} iI + \begin{pmatrix} -\frac{2}{n}i & & & \\ & \ddots & & \\ & & \frac{n-1}{n}2i & \\ & & & \ddots \\ & & & & -\frac{2}{n}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i & & & \\ & \ddots & & \\ & & 4i & \\ & & & \ddots \\ & & & & 2i \end{pmatrix}.$$

Aus (2.1) sehen wir jetzt sofort, dass

$$\mathrm{ad}(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k) \qquad \text{für } j \le k \text{ und}$$

$$\mathrm{ad}(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k) = \frac{1}{2} \mathrm{ad}(e_k \cdot f_j + f_j \cdot e_k - e_j \cdot f_k - f_k \cdot e_j) \qquad \text{für } j < k$$

komplex-lineare Endomorphismen von $\mathfrak{m}$ sind, die bezüglich $e_1, \dots, e_n$ die Matrixdarstellung

$$\mathrm{ad}(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & \cdots & i & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & i & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad j < k,$$

$$\mathrm{ad}(e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2i & \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und}$$

$$\mathrm{ad}(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k) = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 0 & \cdots & -1 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & 1 & \cdots & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad j < k$$

haben. Damit folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 4.4 *Für eine $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildung $u : SU_{n+1} \to S(\mathbb{R}^n)$ gilt*

$$\begin{aligned} Y_{jk}(u) &= i(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k) \cdot u, \\ Z_{jk}(u) &= i(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k) \cdot u && \textit{für } 1 \leq j < k \leq n, \\ Z_{jj}(u) &= i\Big(e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j + \sum_{k=1}^{n} e_k \cdot e_k + f_k \cdot f_k\Big) \cdot u && \textit{für } j = 1, \dots, n \textit{ sowie} \\ Y_j(u) &= i\sqrt{\tfrac{1}{2j(j+1)}}\Big(-j(e_{n-j}e_{n-j} + f_{n-j}f_{n-j}) + \sum_{k=n-j+1}^{n} e_k e_k + f_k f_k\Big) \cdot u \end{aligned}$$

für $j = 1, \dots, n-1$ und

$$Y_n(u) = i\sqrt{\tfrac{n+1}{2n}}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\Big) \cdot u.$$

Beweis: Aus der Äquivarianz-Eigenschaft erhalten wir für beliebiges $Y \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} du(gY) = \frac{d}{dt} u(g \exp(tY))\Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} L \circ \tilde{\alpha}(\exp(-tY))u(g)\Big|_{t=0} \\ &= L_* \circ \tilde{\alpha}_*(-Y)u(g), \end{aligned}$$

also

$$Y(u) = -L_* \circ \tilde{\alpha}_*(Y)u = -L_* \circ \varrho_*^{-1} \circ \alpha_*(Y)u.$$

Mit der Identifikation (2.2) ad $= \varrho_*$ und den Formeln (2.5) für das Differential der metaplektischen Darstellung folgt dann die Behauptung sofort aus dem letzten Lemma. □

Zur Vereinfachung des Ausdrucks aus Lemma 4.2 für den Operator $\tilde{D}D - D\tilde{D}$ werden wir die folgende Formel benötigen:

Lemma 4.5 *Für Elemente $a_1, \dots, a_n$ einer reellen kommutativen Algebra gilt*

$$\sum_{1 \leq j < k}^{n} 2a_j a_k + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)}(-ja_{n-j} + a_{n-j+1} + \cdots + a_n)^2 = \frac{n-1}{n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)^2.$$

Beweis: Induktion über $n \geq 1$. Für $n = 1$ gilt die Gleichung. Gelte die Formel jetzt für die Elemente $a_2, \dots, a_n$ und sei $s = \sum_{j=1}^{n} a_j$, $\tilde{s} = \sum_{j=2}^{n} a_j$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq j < k}^{n} 2a_j a_k + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j(j+1)}(-ja_{n-j} + a_{n-j+1} + \cdots + a_n)^2 \\ = &\sum_{2 \leq j < k}^{n} 2a_j a_k + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{j(j+1)}(-ja_{n-j} + a_{n-j+1} + \cdots + a_n)^2 \\ &\qquad + \sum_{k=2}^{n} 2a_1 a_k + \frac{1}{(n-1)n}(-(n-1)a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{n-2}{n-1}\tilde{s}^2+\sum_{k=2}^{n}2a_1a_k+\frac{1}{(n-1)n}(-na_1+s)^2\\
&=\frac{n-2}{n-1}\tilde{s}^2+2(s-\tilde{s})\tilde{s}+\frac{1}{(n-1)n}(-n(s-\tilde{s})+s)^2\\
&=\frac{n-2}{n-1}\tilde{s}^2+2s\tilde{s}-2\tilde{s}^2+\frac{1}{(n-1)n}(n\tilde{s}-(n-1)s)^2\\
&=\frac{n-2}{n-1}\tilde{s}^2+2s\tilde{s}-2\tilde{s}^2+\frac{n}{n-1}\tilde{s}^2-2s\tilde{s}+\frac{n-1}{n}s^2\\
&=\frac{n-1}{n}s^2
\end{aligned}
$$

□

Für $L\circ\tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildungen $u : SU_{n+1}\to S(\mathbb{R}^n)$ definieren wir jetzt den Casimiroperator Ω von SU_{n+1} und den Operator H_{Osz} des n-dimensionalen harmonischen Oszillators durch

$$
\Omega u=\sum_{j=1}^{2n}X_j(X_j(u))+\sum_{j<k}Y_{jk}(Y_{jk}(u))+\sum_{j<k}Z_{jk}(Z_{jk}(u))+\sum_{j=1}^{n}Y_j(Y_j(u)), \quad (4.4)
$$

$$
H_{\mathrm{Osz}}u=-\left(\sum_{j=1}^{n}e_j\cdot e_j+f_j\cdot f_j\right)\cdot u. \quad (4.5)
$$

Damit erhalten wir den

Satz 4.6 *Sei V ein endlichdimensionaler, $L\circ\tilde{\alpha}$-invarianter Unterraum von $S(\mathbb{R}^n)$ und $u : SU_{n+1}\to V$ eine $L\circ\tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildung. Dann hat der Operator $P=i(\tilde{D}D-D\tilde{D})$ die Form*

$$
Pu=-\Omega u-3H_{\mathrm{Osz}}^2u-\frac{3n(n-1)}{2}u.
$$

Beweis: Aus den Beziehungen (4.3) und der Folgerung 4.4 erhalten wir zunächst

$$
\begin{aligned}
[X_j,X_k](u)=[X_{n+j},X_{n+k}](u)&=i(e_k\cdot f_j-e_j\cdot f_k)\cdot u,\\
[X_j,X_{n+k}](u)=[X_k,X_{n+j}](u)&=i(e_j\cdot e_k+f_j\cdot f_k)\cdot u
\end{aligned}
$$

für $j<k$ sowie

$$
[X_j,X_{n+j}](u)=i\left(e_j\cdot e_j+f_j\cdot f_j+\sum_{k=1}^{n}e_k\cdot e_k+f_k\cdot f_k\right)\cdot u.
$$

Aus Lemma 4.2 folgt dann

$$\begin{aligned}(\tilde{D}D - D\tilde{D})u = i\sum_{j=1}^{n} &X_j(X_j(u)) + X_{n+j}(X_{n+j}(u)) \\ &+ 2i\sum_{j<k}(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k)^2 \cdot u + 2i\sum_{j<k}(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k)^2 \cdot u \\ &+ i\sum_{j=1}^{n}(e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j)^2 \cdot u + i\Big(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\Big)^2 \cdot u.\end{aligned}$$

Weiter berechnen wir

$$\left.\begin{aligned} Y_{jk}(Y_{jk}(u)) &= -(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k)^2 \cdot u, \\ Z_{jk}(Z_{jk}(u)) &= -(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k)^2 \cdot u \end{aligned}\right. \qquad \text{für } j < k,$$

$$Y_j(Y_j(u)) = -\frac{1}{2j(j+1)}\Big(-j(e_{n-j}e_{n-j} + f_{n-j}f_{n-j}) + \sum_{k=n-j+1}^{n} e_k e_k + f_k f_k\Big)^2 \cdot u$$

für $j = 1, \ldots, n-1$ und

$$Y_n(Y_n(u)) = -\frac{n+1}{2n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\Big)^2 \cdot u.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}(\tilde{D}D - D\tilde{D})u = i\Omega u &+ 3i\sum_{j<k}(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k)^2 \cdot u + 3i\sum_{j<k}(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k)^2 \cdot u \\ &+ i\sum_{j=1}^{n}(e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j)^2 \cdot u + i\frac{3n+1}{2n}\Big(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\Big)^2 \cdot u \\ &+ i\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2j(j+1)}\Big(-j(e_{n-j}e_{n-j} + f_{n-j}f_{n-j}) + \sum_{k=n-j+1}^{n} e_k e_k + f_k f_k\Big)^2 \cdot u.\end{aligned}$$

Zur weiteren Zusammenfassung wenden wir jetzt das letzte Lemma auf $a_1, \ldots, a_n$ mit $a_j = e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j$ an und erhalten

$$\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{2j(j+1)}(-ja_{n-j} + a_{n-j+1} + \cdots + a_n)^2 = \frac{n-1}{2n}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j\Big)^2 - \sum_{1\le j<k} a_j a_k.$$

Mit den Zwischenrechnungen ($j \neq k$)

$$\begin{aligned}(e_k \cdot f_j - e_j \cdot f_k)^2 &= (e_k f_j - e_j f_k)(e_k f_j - e_j f_k) \\ &= e_k e_k f_j f_j - e_k(e_j f_j + 1)f_k - e_j(e_k f_k + 1)f_j + e_j e_j f_k f_k \\ &= e_k e_k f_j f_j - 2e_j e_k f_j f_k + e_j e_j f_k f_k - e_k f_k - e_j f_j\end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
(e_j \cdot e_k + f_j \cdot f_k)^2 &= (e_j e_k + f_j f_k)(e_j e_k + f_j f_k) \\
&= e_j e_j e_k e_k + e_j e_k f_j f_k + (e_j f_j + 1)(e_k f_k + 1) + f_j f_j f_k f_k \\
&= e_j e_j e_k e_k + 2 e_j e_k f_j f_k + f_j f_j f_k f_k + e_j f_j + e_k f_k + 1
\end{aligned}
$$

erhalten wir dann:

$$
\begin{aligned}
(\tilde{D}D - D\tilde{D})u &= i\Omega u + 2i\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\right)^2 \cdot u \\
&\quad + 3i \sum_{j<k} (e_j e_j e_k e_k + e_k e_k f_j f_j + e_j e_j f_k f_k + f_j f_j f_k f_k + 1) \cdot u \\
&\quad + i \sum_{j=1}^{n} (e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j)^2 \cdot u - i \sum_{j<k} (e_j e_j + f_j f_j)(e_k e_k + f_k f_k) \cdot u \\
&= i\Omega u + 2i\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\right)^2 \cdot u + i\frac{3n(n-1)}{2} u \\
&\quad + i \sum_{j,k=1}^{n} (e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j)(e_k \cdot e_k + f_k \cdot f_k) \cdot u \\
&= i\Omega u + 3i\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \cdot e_j + f_j \cdot f_j\right)^2 \cdot u + i\frac{3n(n-1)}{2} u
\end{aligned}
$$

$\square$

Kapitel 5

Das Spektrum des Operators P

In diesem abschließenden Kapitel zeigen wir, dass sich der Operator P auf endlichdimensionale Teilbündel des Spinorbündels einschränkt. Dann benutzen wir die Darstellungstheorie von SU_{n+1}, um das Spektrum von P auf diesen Teilbündeln zu bestimmen.

5.1 Aufspaltung des Spinorbündels

Wir untersuchen zuerst den in (4.5) definierten Operator des harmonischen Oszillators. Er ist ein unbeschränkter, selbstadjungierter Operator des Hilbertraums $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $S(\mathbb{R}^n)$ und von der Form

$$H_{\mathrm{Osz}} u = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) u, \qquad u \in S(\mathbb{R}^n).$$

Durch einfaches nachrechnen verifiziert man, dass die Funktionen

$$h_l(y) = e^{\frac{1}{2}y^2} \frac{d^l}{dy^l} \left(e^{-y^2} \right), \qquad y \in \mathbb{R},\, l \in \mathbb{N} \tag{5.1}$$

Eigenfunktionen des Operators $y^2 - \frac{d^2}{dy^2}$ zum Eigenwert $2l+1$ sind. Bis auf multiplikative Konstanten bilden sie eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R})$ und werden Hermitefunktionen genannt, siehe [15]. Daher sind die Produkte

$$h_{l_1 \dots l_n}(x_1, \dots, x_n) = h_{l_1}(x_1) \dots h_{l_n}(x_n), \qquad l_1, \dots, l_n \in \mathbb{N}$$

Eigenfunktionen von H_{Osz} zum Eigenwert $2(l_1 + \dots + l_n) + n$, die, bis auf Konstanten, eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{R}^n)$ bilden. Wir erhalten damit eine orthogonale Zerlegung

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \widehat{\bigoplus_{l \geq 0}} V_l$$

des Hilbertraums in die Eigenräume V_l von H_{Osz} zum Eigenwert $2l+n$. Dabei ist

$$V_l = \mathrm{span}\big\{h_{l_1\dots l_n} \,\big|\, l_1 + \dots + l_n = l\big\}, \tag{5.2}$$

und die obige unendliche Summe $\widehat{\oplus}$ ist im Hilbertraumsinne als Abschluss der algebraischen direkten Summe zu verstehen.

Wir wollen jetzt zeigen, dass die V_l gerade die irreduziblen Unterräume der Darstellung $L \circ \tilde{\alpha}$ von H sind. Dazu benutzen wir den folgenden Hilfssatz über Darstellungen von Liegruppen.

Lemma 5.1 *Sei $\sigma : G \to Gl(V)$ eine endlichdimensionale Darstellung einer zusammenhängenden Liegruppe G und $\sigma_* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ die zugehörige Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$. Für einen Unterraum $U \subset V$ gilt dann*

$$U \ \sigma\text{-invariant} \qquad \Longleftrightarrow \qquad U \ \sigma_*\text{-invariant.}$$

Beweis: Sei U σ-invariant. Für $v \in U$ und $X \in \mathfrak{g}$ gilt dann

$$\sigma_*(X)v = \frac{d}{dt} \underbrace{\sigma(\exp(tX))v}_{\in U}\Big|_{t=0} \in U,$$

also ist U auch σ_*-invariant. Sei U jetzt σ_*-invariant, dann gilt

$$\sigma(\exp(X))v = \exp(\sigma_*(X))v = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\sigma_*(X)^k v}_{\in U} \in U$$

für $v \in U$. Da G zusammenhängend ist, erzeugen die Elemente $\exp(X)$ mit $X \in \mathfrak{g}$ die Gruppe und es folgt die σ-Invarianz von U. $\square$

Satz 5.2 *Seien V_k die Eigenräume des harmonischen Oszillators aus (5.2). Für die Darstellung $L \circ \tilde{\alpha} : H \to U(L^2(\mathbb{R}^n))$ ist dann*

$$L^2(\mathbb{R}^n) = \widehat{\bigoplus_{l \geq 0}} V_l$$

eine Zerlegung in irreduzible Unterräume.

Beweis: Da die Darstellung $L \circ \tilde{\alpha}$ unendlichdimensional ist, können wir nicht direkt das letzte Lemma anwenden. Stattdessen zeigen wir die $L \circ \tilde{\alpha}$-Invarianz von V_l dadurch, dass die Darstellung $L \circ \tilde{\alpha}$ mit dem harmonischen Oszillator H_{Osz} vertauscht. Sei dazu

$$\begin{aligned} \mu : \ \mathfrak{m} \times S(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow S(\mathbb{R}^n) \\ (X, u) &\longmapsto X \cdot u \end{aligned}$$

die Cliffordmultiplikation. Der Operator H_{Osz} kann dann basisunabhängig durch die Verkettung

$$H_{\mathrm{Osz}} : \ S(\mathbb{R}^n) \ \xrightarrow{\mu} \ \mathfrak{m}^* \otimes S(\mathbb{R}^n) \ \cong \ \mathfrak{m} \otimes S(\mathbb{R}^n) \ \xrightarrow{-\mu} \ S(\mathbb{R}^n)$$

definiert werden, wobei $\mathfrak{m}^*$ mit $\mathfrak{m}$ durch das Skalarprodukt aus (3.4) identifiziert wird. Für eine beliebige Orthonormalbasis $(a_1, \ldots, a_{2n})$ von $\mathfrak{m}$ liefert diese Definition

$$u \stackrel{\mu}{\longmapsto} \sum_{j=1}^{2n} a_j^* \otimes (a_j \cdot u) \stackrel{\cong}{\longmapsto} \sum_{j=1}^{2n} a_j \otimes (a_j \cdot u) \stackrel{-\mu}{\longmapsto} -\sum_{j=1}^{2n} a_j \cdot a_j \cdot u,$$

wobei $(a_1^*, \ldots, a_{2n}^*)$ die duale Basis ist. Für die Orthonormalbasis aus den Elementen $e_j = X_j$ und $f_j = X_{n+j}$ stimmt dies tatsächlich mit der Definition (4.5) von H_{Osz} überein. Aus der Verträglichkeit (2.4) von metaplektischer Darstellung und Cliffordmultiplikation folgt dann

$$L \circ \tilde{\alpha}(h) \sum_{j=1}^{2n} a_j^2 \cdot u = \sum_{j=1}^{2n} \big(\alpha(h) a_j\big)^2 \cdot L \circ \tilde{\alpha}(h) u$$

für $h \in H$. Nach Satz 3.3 ist $\alpha(h) \in U(\mathfrak{m})$, also $(\alpha(h)a_1, \ldots, \alpha(h)a_{2n})$ wieder eine Orthonormalbasis und daher $L \circ \tilde{\alpha}(h) H_{\mathrm{Osz}} = H_{\mathrm{Osz}} L \circ \tilde{\alpha}(h)$. Hieraus folgt sofort die behauptete Invarianz von V_l.
Wegen des letzten Lemmas ist jetzt die $L \circ \tilde{\alpha}$-Irreduzibilität von V_l äquivalent zur Irreduzibilität bezüglich $(L \circ \tilde{\alpha})_*$. Entsprechend Folgerung 4.4 gilt

$$(L \circ \tilde{\alpha})_*(Y_{jk})u = \left(x_k \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u, \quad (L \circ \tilde{\alpha})_*(Z_{jk})u = i \left(x_j x_k - \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u$$

für $j < k$, $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Ausgehend von der Definition (5.1) erhalten wir jetzt

$$\frac{d}{dy} h_l = y h_l + h_{l+1}$$

und

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dy^2} h_l = h_l + y \frac{d}{dy} h_l + \frac{d}{dy} h_{l+1} = h_l + y^2 h_l + y h_{l+1} + \frac{d}{dy} h_{l+1} \\
\Longrightarrow \quad & y h_{l+1} + \frac{d}{dy} h_{l+1} + h_l = \left(\frac{d^2}{dy^2} - y^2 \right) h_l = -(2l+1) h_l \\
\Longrightarrow \quad & \frac{d}{dy} h_{l+1} = -2(l+1) h_l - y h_{l+1}
\end{aligned}$$

Wegen $\frac{d}{dy} h_0 = -y e^{-\frac{1}{2}y^2} = -y h_0$ gilt damit für alle $l \geq 0$:

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dy} h_l = -2l h_{l-1} - y h_l \\
\Longrightarrow \quad & y h_l + h_{l+1} = -2l h_{l-1} - y h_l \\
\Longrightarrow \quad & y h_l = -l h_{l-1} - \frac{1}{2} h_{l+1}
\end{aligned}$$

Nun können wir rechnen

$$\begin{aligned}
&\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)h_l(x)h_m(y)\\
&\qquad = \big(xh_l(x) + h_{l+1}(x)\big)yh_m(y) - xh_l(x)\big(yh_m(y) + h_{m+1}(y)\big)\\
&\qquad = h_{l+1}(x)yh_m(y) - xh_l(x)h_{m+1}(y)\\
&\qquad = h_{l+1}(x)\left(-mh_{m-1}(y) - \frac{1}{2}h_{m+1}(y)\right) + \left(lh_{l-1}(x) + \frac{1}{2}h_{l+1}(x)\right)h_{m+1}(y)\\
&\qquad = lh_{l-1}(x)h_{m+1}(y) - mh_{l+1}(x)h_{m-1}(y),\\
&\left(xy - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)h_l(x)h_m(y)\\
&\qquad = xyh_l(x)h_m(y) - \big(xh_l(x) + h_{l+1}(x)\big)\big(yh_m(y) + h_{m+1}(y)\big)\\
&\qquad = \left(lh_{l-1}(x) + \frac{1}{2}h_{l+1}(x)\right)h_{m+1}(y) + h_{l+1}(x)\left(mh_{m-1}(y) + \frac{1}{2}h_{m+1}(y)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad - h_{l+1}(x)h_{m+1}(y)\\
&\qquad = lh_{l-1}(x)h_{m+1}(y) + mh_{l+1}(x)h_{m-1}(y)
\end{aligned}$$

und erhalten daraus:

$$\begin{aligned}
(L\circ\tilde{\alpha})_*(Y_{jk})h_{l_1\dots l_n} &= l_j h_{l_1\dots l_j-1\dots l_k+1\dots l_n} - l_k h_{l_1\dots l_j+1\dots l_k-1\dots l_n},\\
(L\circ\tilde{\alpha})_*(Z_{jk})h_{l_1\dots l_n} &= il_j h_{l_1\dots l_j-1\dots l_k+1\dots l_n} + il_k h_{l_1\dots l_j+1\dots l_k-1\dots l_n}
\end{aligned}$$

für $j < k$. Damit gilt offenbar

$$\begin{aligned}
\big((L\circ\tilde{\alpha})_*(Y_{jk}) - i(L\circ\tilde{\alpha})_*(Z_{jk})\big)h_{l_1\dots l_n} &= 2l_j h_{l_1\dots l_j-1\dots l_k+1\dots l_n},\\
\big(-(L\circ\tilde{\alpha})_*(Y_{jk}) - i(L\circ\tilde{\alpha})_*(Z_{jk})\big)h_{l_1\dots l_n} &= 2l_k h_{l_1\dots l_j+1\dots l_k-1\dots l_n}.
\end{aligned}$$

Somit enthält jeder $(L\circ\tilde{\alpha})_*$-invariante Unterraum von V_l die Funktion $h_{l,0,\dots,0}$ und daher auch jedes $h_{l_1\dots l_n}$ mit $l_1 + \dots + l_n = l$; V_l ist also irreduzibel. □

Aus der Zerlegung der Darstellung $L\circ\tilde{\alpha}$ in irreduzible Komponenten ergibt sich jetzt eine Aufspaltung[1]

$$Q = \widehat{\bigoplus_{l\geq 0}} Q_l$$

des symplektischen Spinorbündels in die endlichdimensionalen Teilbündel

$$Q_l = SU_{n+1}\times_{L\circ\tilde{\alpha}} V_l.$$

Satz 5.3 *Der Definitionsbereich des Operators $P = i(\tilde{D}D - D\tilde{D})$ umfasst die algebraische Summe*

$$\bigoplus_{l\geq 0}\Gamma(Q_l).$$

Außerdem respektiert P diese Aufspaltung des Spinorbündels, d. h. für einen Schnitt $\varphi\in\Gamma(Q_l)$ gilt $P\varphi\in\Gamma(Q_l)$.

[1] Die Hilbertraum-direkte Summe ist hier faserweise zu verstehen.

Beweis: Nach Lemma 4.2 gehören die Schnitte von Q_l zum Definitionsbereich des Operators P. Mit der Formel aus Satz 4.6 für P ist nur noch zu zeigen, dass der Casimiroperator Ω die Teilbündel Q_l invariant lässt. Sei $u : SU_{n+1} \to V_l$ eine $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivariante Abbildung. Zu Beginn von Abschnitt 4.2 haben wir gesehen, dass dann die Cliffordmultiplikation mit $Y \in \mathfrak{m}$ und die Ableitung nach $X \in \mathfrak{su}_{n+1}$ vertauschen, $X(Y \cdot u) = Y \cdot X(u)$. Daher vertauscht auch der Casimir- mit dem Hamiltonoperator, es gilt $H_{\mathrm{Osz}}\Omega u = \Omega H_{\mathrm{Osz}} u = (2l+n)\Omega u$ und daher $\Omega u : SU_{n+1} \to V_l$. □

Damit ist die Berechnung des Spektrums von P reduziert auf die Berechnung des Spektrums des Casimiroperators Ω auf den Teilbündeln Q_l.

5.2 Induzierte Darstellung und Frobeniusreziprozität

Zur Untersuchung des Casimiroperators auf den Teilbündeln Q_l des Spinorbündels werden wir in diesem Abschnitt Schnitte von Q_l mit den entsprechenden äquivarianten Abbildungen identifizieren. Das heißt, wir schreiben $\Gamma(Q_l)$ für die Menge aller $L \circ \tilde{\alpha}$-äquivarianten Abbildungen von SU_{n+1} nach V_l.

Sei $u \in \Gamma(Q_l)$ und $g_0 \in SU_{n+1}$. Man rechnet leicht nach, dass

$$\mathrm{Ind}(g_0)u : \; g \;\longmapsto\; u(g_0^{-1} g)$$

wieder eine Abbildung aus $\Gamma(Q_l)$ ist und damit eine Darstellung Ind von SU_{n+1} auf $\Gamma(Q_l)$ definiert wird. Sie wird die (von $L \circ \tilde{\alpha}$) *induzierte Darstellung* genannt, vergleiche auch [10]. Sei σ eine weitere Darstellung von SU_{n+1} auf einem Vektorraum W. Unter einem SU_{n+1}*-Morphismus* zwischen den Darstellungen (σ, W) und $(\mathrm{Ind}, \Gamma(Q_l))$ versteht man eine lineare Abbildung $A : W \to \Gamma(Q_l)$, die

$$A \circ \sigma(g) = \mathrm{Ind}(g) \circ A \qquad \text{für alle } g \in SU_{n+1}$$

erfüllt. Für den Vektorraum aller SU_{n+1}-Morphismen von (σ, W) nach $(\mathrm{Ind}, \Gamma(Q_l))$ verwenden wir die Notation

$$\mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W, \Gamma(Q_l)).$$

Für eine gegebene Darstellung (σ, W) von SU_{n+1} können wir nun analog zu (4.4) den Casimiroperator auf W durch

$$\Omega_\sigma = \sum_{j=1}^{2n} \sigma_*(X_j)^2 + \sum_{j<k} \sigma_*(Y_{jk})^2 + \sum_{j<k} \sigma_*(Z_{jk})^2 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_*(Y_j)^2$$

definieren. Im folgenden Abschnitt werden wir explizit nachrechnen, dass für eine irreduzible Darstellung σ der Casimiroperator Ω_σ ein Vielfaches der Identität ist. Es gilt dann das folgende

Lemma 5.4 *Sei (σ, W) eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1}, $\Omega_\sigma = \lambda\, id_W$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$ und $A \in \mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W, \Gamma(Q_l))$. Für $v \in W$ gilt dann*

$$\Omega A v = \lambda A v.$$

Beweis: Nach Definition der induzierten Darstellung gilt für $v \in W$

$$Av(g) = \mathrm{Ind}(g^{-1}) Av(e) = A\sigma(g^{-1})v(e)$$

und daher für die Ableitung der Funktion $Av \in \Gamma(Q_l)$ nach $X \in \mathfrak{su}_{n+1}$

$$\begin{aligned} X(Av)(g) &= \frac{d}{dt} Av\big(g \exp(tX)\big)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} A\sigma\big(\exp(-tX)g^{-1}\big)v(e)\Big|_{t=0} \\ &= -A\sigma_*(X)\sigma(g^{-1})v(e). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir benutzt, dass W aufgrund der Irreduzibilität endlichdimensional und daher der Operator A stetig ist. Es folgt

$$\begin{aligned} X(X(Av))(g) &= -\frac{d}{dt} A\sigma_*(X)\sigma\big(\exp(-tX)g^{-1}\big)v(e)\Big|_{t=0} \\ &= A\sigma_*(X)^2\sigma(g^{-1})v(e) \end{aligned}$$

und damit

$$\Omega A v(g) = A\Omega_\sigma \sigma(g^{-1})v(e) = \lambda A\sigma(g^{-1})v(e) = \lambda A v(g).$$

$\square$

Ist (σ, W) eine irreduzible Darstellung, so bildet also ein SU_{n+1}-Morphismus $A : W \to \Gamma(Q_l)$ in einen Eigenraum von Ω ab. Mit dem Schurschen Lemma (siehe [10]) folgt aus der Irreduzibilität von W, dass der Morphismus A injektiv und sein Bild $\mathrm{Im}\, A$ ein irreduzibler Unterraum von $\Gamma(Q_l)$ ist. Man nennt dann $A : W \to \mathrm{Im}\, A$ einen SU_{n+1}-Isomorphismus und die beiden Darstellungen σ und $\mathrm{Ind}\,|_{\mathrm{Im}\, A}$ äquivalent, $\sigma \sim \mathrm{Ind}\,|_{\mathrm{Im}\, A}$. Wir betrachten jetzt alle zu einer gegebenen irreduziblen Darstellung (σ, W) äquivalenten Unterräume U von $\Gamma(Q_l)$ und bezeichnen mit $\Gamma(Q_l, \sigma)$ den von ihnen aufgespannten Teilraum, d. h.

$$\Gamma(Q_l, \sigma) = \sum_{\sigma \sim \mathrm{Ind}\,|_U} U.$$

Er wird *isotype Komponente* genannt, vergleiche [10]. Jeder irreduzible Unterraum von $\Gamma(Q_l, \sigma)$ ist wieder äquivalent zu (σ, W). Um zu sehen, wie sich $\Gamma(Q_l)$ in seine isotypen Komponenten zerlegt, werden wir $\Gamma(Q_l)$ mit einem Skalarprodukt versehen. Dazu verwenden wir ein sogenanntes *Haarmaß* μ auf SU_{n+1}, das ist ein translationsinvariantes Maß, es gilt also

$$\int f(g)d\mu(g) = \int f(g_0 g)d\mu(g) = \int f(g g_0)d\mu(g)$$

für $g_0 \in SU_{n+1}$ und eine integrierbare Funktion f. Im Allgemeinen (siehe etwa [10]) existiert auf kompakten Gruppen und Liegruppen ein solches Haarmaß. Mit dem Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)_{L^2}$ auf $V_l \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ können wir jetzt durch

$$\langle u|v\rangle = \int \big(u(g)\big|v(g)\big)_{L^2} d\mu(g) \tag{5.3}$$

ein Skalarprodukt auf $\Gamma(Q_l)$ definieren. Die Vervollständigung von $\Gamma(Q_l)$ bezüglich des Skalarprodukts bezeichnen wir mit $\Gamma^2(Q_l)$. Aus der Translationsinvarianz von μ ergibt sich nun für die induzierte Darstellung

$$\big\langle \mathrm{Ind}(g_0)u\big| \mathrm{Ind}(g_0)v\big\rangle = \int \big(u(g_0^{-1}g)\big|v(g_0^{-1}g)\big)_{L^2} d\mu(g) = \int \big(u(g)\big|v(g)\big)_{L^2} d\mu(g),$$

sie ist also eine unitäre Darstellung von SU_{n+1} auf $\Gamma^2(Q_l)$. Nach [10] oder [12] sind die isotypen Komponenten dann endlichdimensional und bilden eine orthogonale Zerlegung

$$\Gamma^2(Q_l) = \widehat{\bigoplus_\sigma} \Gamma(Q_l, \sigma), \tag{5.4}$$

wobei die Summe über alle Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen σ von SU_{n+1} läuft.

Sei (σ, W) eine irreduzible Darstellung. Ein SU_{n+1}-Morphismus $A : W \to \Gamma(Q_l)$ bildet in die σ entsprechende isotype Komponente ab, und daher haben wir die folgende lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \phi:\ W \otimes \mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W, \Gamma(Q_l)) &\longrightarrow \Gamma(Q_l, \sigma) \\ v \otimes A \qquad\qquad &\longmapsto Av \end{aligned} \tag{5.5}$$

Satz 5.5 *Für eine irreduzible Darstellung (σ, W) von SU_{n+1} ist die oben definierte Abbildung ϕ ein Isomorphismus.*

Beweis: Für die Surjektivität reicht es zu zeigen, dass jeder zu (σ, W) äquivalente Unterraum U von $\Gamma(Q_l)$ im Bild von ϕ liegt. Gilt $\mathrm{Ind}|_U \sim \sigma$, so gibt es aber einen SU_{n+1}-Isomorphismus $A : W \to U$, und jedes Element von U lässt sich als $Av = \phi(v \otimes A)$ schreiben.
Sei jetzt $\Gamma(Q_l, \sigma) = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ eine Zerlegung in irreduzible Unterräume, es gilt also $\sigma \sim \mathrm{Ind}|_{U_j}$ für jedes j. Nun ist, siehe [10], die Dimension von $\mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W, \Gamma(Q_l))$ gleich der Anzahl der zu (σ, W) äquivalenten Unterräume in einer irreduziblen Zerlegung von $\Gamma(Q_l)$, hier also gleich r. Damit haben sowohl der Definitions- als auch der Zielbereich von ϕ die Dimension $r \dim W$, und aus der Surjektivität von ϕ folgt die Bijektivität. $\square$

Unmittelbar aus Lemma 5.4 und der Surjektivität von ϕ ergibt sich die

Folgerung 5.6 *Ist σ eine irreduzible Darstellung und $\Omega_\sigma = \lambda\, id$, so ist jede isotype Komponente $\Gamma(Q_l, \sigma)$ ein Eigenraum des Casimiroperators Ω zum Eigenwert λ.* $\square$

Die Zerlegung (5.4) von $\Gamma^2(Q_l)$ ist damit eine Zerlegung in Eigenräume, und ein Eigenraum $\Gamma(Q_l,\sigma)$ ist nicht trivial genau dann, wenn

$$\mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W,\Gamma(Q_l)) \neq \{0\}$$

ist. Um die irreduziblen Darstellungen (σ, W) zu finden, für die diese Formel gilt, benutzen wir die *Frobeniusreziprozität*: Für ein $A \in \mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W,\Gamma(Q_l))$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi_A :\ W &\longrightarrow V_l \\ v &\longmapsto Av(e). \end{aligned}$$

Es gilt dann für ein Element $h \in H$ der Isotropiegruppe

$$\begin{aligned} \varphi_A\sigma(h)v = A\sigma(h)v(e) &= \mathrm{Ind}(h)Av(e) = Av(h^{-1}) \\ &= L\circ\tilde{\alpha}(h)Av(e) = L\circ\tilde{\alpha}(h)\varphi_A v. \end{aligned}$$

Wir haben also einen H-Morphismus $\varphi_A : (\sigma, W) \to (L\circ\tilde{\alpha}, V_l)$. Nach Robert [10] erhalten wir damit einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{SU_{n+1}}(W,\Gamma(Q_l)) & \xrightarrow{\cong} & \mathrm{Hom}_H(W,V_l) \\ A & \longmapsto & \varphi_A. \end{array}$$

Um die nicht trivialen Eigenräume zu bestimmen, müssen wir also irreduzible Darstellungen (σ, W) finden, für die $\mathrm{Hom}_H(W,V_l) \neq \{0\}$ ist. Dies werden wir im nächsten Abschnitt tun.

5.3 Eigenwerte des Casimiroperators

Wir rekapitulieren zunächst etwas Darstellungstheorie von SU_{n+1}. Eine ausführliche Behandlung findet man z. B. in [5] oder [12]. Die Untergruppe

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} z_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & z_n \end{pmatrix} \,\middle|\, z_j \in S^1,\ z_0\cdots z_n = 1 \right\}$$

von SU_{n+1} ist isomorph zum n-dimensionalen Torus und wird *maximaler Torus von* SU_{n+1} genannt. Offenbar ist T auch eine Untergruppe der Isotropiegruppe H. Mit Hilfe des Schurschen Lemmas folgt aus der Kommutativität von T, dass alle (komplexen) irreduziblen Darstellungen σ von T eindimensional sind. Sie sind von der Form

$$\sigma :\ \begin{pmatrix} z_0 & & \\ & \ddots & \\ & & z_n \end{pmatrix} \longmapsto z_0^{k_0}\cdots z_n^{k_n} \tag{5.6}$$

mit gewissen $k_0,\dots,k_n \in \mathbb{Z}$. Wir definieren den n-dimensionalen Vektorraum

$$\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \,\middle|\, a_j \in \mathbb{R},\ a_0+\cdots+a_n = 0 \right\}$$

und Linearformen τ_j auf $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ durch

$$\tau_j : \begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix} \longmapsto a_j.$$

Die Liealgebra von T ist dann $i\mathfrak{t}_\mathbb{R}$, und aus der Exponentialabbildung erhalten wir einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} e : \mathfrak{t}_\mathbb{R} &\longrightarrow T \\ X &\longmapsto \exp(2\pi i X). \end{aligned}$$

Sei jetzt (σ, W) eine Darstellung von SU_{n+1} oder H. Ihre Einschränkung $\sigma|_T$ auf den maximalen Torus zerfällt in irreduzible Darstellungen der Form (5.6). Für ein Element v eines bezüglich $\sigma|_T$ irreduziblen Unterraums von W gilt dann

$$\sigma \circ e(X)v = e^{2\pi i \lambda(X)} v, \qquad X \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}$$

mit

$$\lambda = k_0\tau_0 + \cdots + k_n\tau_n, \qquad k_0, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}.$$

Das Funktional λ heißt *Gewicht* der Darstellung σ, der zugehörige irreduzible Unterraum wird *Gewichtsraum* genannt. Wegen $\tau_0 + \cdots + \tau_n = 0$ auf $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ kann man λ immer in der Form $\lambda = k_0\tau_0 + \cdots + k_{n-1}\tau_{n-1}$ schreiben.

Eine besondere Rolle in der Darstellungstheorie spielen die von Null verschiedenen Gewichte der komplexifizierten adjungierten Darstellung. Sie werden *Wurzeln* genannt. Für die Gruppe SU_{n+1} sind

$$\alpha_{jk} = \tau_j - \tau_k, \qquad j \neq k,\ j, k = 0, \ldots, n$$

die Wurzeln. Auf der Menge der Wurzeln definiert man dann eine Ordnung durch Wahl eines Elementes $X_0 \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}$ mit $\alpha_{jk}(X_0) \neq 0$ stets. Wir wählen

$$X_0 = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & n-1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & c \end{pmatrix} \qquad \text{mit } c = -1 - 2 \cdots - n$$

und erhalten damit $\alpha_{jk}(X_0) > 0$ für $j < k$. Diese α_{jk} werden als *positive Wurzeln* bezeichnet.

Ausgehend von der durch X_0 gewählten Ordnung gilt nun der folgende Satz, der die irreduziblen Darstellungen durch ihre Gewichte charakterisiert:

Satz 5.7 *Jede irreduzible Darstellung σ von SU_{n+1} hat genau ein Gewicht $\lambda_{\max}$, so dass für jedes andere Gewicht λ von σ gilt*

$$\lambda_{\max}(X_0) > \lambda(X_0).$$

Dieses sogenannte maximale Gewicht *hat die Gestalt*

$$\lambda_{\max} = k_0\tau_0 + \cdots + k_n\tau_n, \qquad k_0 \geq k_1 \geq \cdots \geq k_n,$$

und für jede solche Linearform $\lambda_{\max}$ existiert bis auf Isomorphie genau eine irreduzible Darstellung mit $\lambda_{\max}$ als maximalem Gewicht. □

Ein entsprechender Satz gilt für die Darstellungen von H, wobei die maximalen Gewichte aber nur durch $k_1 \geq \cdots \geq k_n$ eingeschränkt sind.

Wir berechnen jetzt die maximalen Gewichte der Darstellung $L \circ \tilde{\alpha}$ von H auf V_l.

Lemma 5.8 *Das maximale Gewicht der Darstellung $L \circ \tilde{\alpha}$ auf V_l ist*

$$\Big(-l - \frac{n+1}{2}\Big)\tau_0 + l\tau_1.$$

Beweis: Entsprechend Folgerung 4.4 gilt

$$(L \circ \tilde{\alpha})_*(Z_{jj})u = i\left(x_j^2 - \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + H_{\mathrm{Osz}}\right)u$$

für $j = 1, \dots, n$ und $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Für $h_{l_1 \dots l_n} \in V_l$ folgt also die Formel

$$(L \circ \tilde{\alpha})_*(Z_{jj})h_{l_1 \dots l_n} = i(2l_j + 2l + n + 1)h_{l_1 \dots l_n}.$$

Mit der Definition 4.2 von Z_{jj} erhält man daraus

$$\begin{aligned}(L \circ \tilde{\alpha})_*\left(\begin{pmatrix} ia_0 & & \\ & \ddots & \\ & & ia_n \end{pmatrix}\right)h_{l_1 \dots l_n} &= i\Big(a_1\big(l_1 + l + \tfrac{n+1}{2}\big) + \cdots + a_n\big(l_n + l + \tfrac{n+1}{2}\big)\Big)h_{l_1 \dots l_n} \\ &= i\Big(-a_0\big(l + \tfrac{n+1}{2}\big) + a_1 l_1 + \cdots + a_n l_n\Big)h_{l_1 \dots l_n}\end{aligned}$$

für $a_0 + \cdots + a_n = 0$. Die Gewichte von $L \circ \tilde{\alpha}$ auf V_l sind daher

$$\Big(-l - \frac{n+1}{2}\Big)\tau_0 + l_1\tau_1 + \cdots + l_n\tau_n$$

mit $l_1 + \cdots + l_n = l$, und von diesen ist

$$\Big(-l - \frac{n+1}{2}\Big)\tau_0 + l\tau_1$$

das maximale. □

Wir können jetzt ermitteln, für welche irreduziblen Darstellungen (σ, W) von SU_{n+1} der Raum $\mathrm{Hom}_H(W, V_l) \neq \{0\}$ ist. Schränkt man σ auf H ein, so zerfällt $\sigma|_H$ in gewisse irreduzible Darstellungen von H und $\dim \mathrm{Hom}_H(W, V_l)$ ist gerade die Anzahl, mit der $(L \circ \tilde{\alpha}, V_l)$ dabei vorkommt. Der nächste Satz sagt uns, wann das geschieht. Er stammt aus [4], und ein Beweis wird im Anhang A geführt.

Satz 5.9 *Sei σ eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1} mit maximalem Gewicht $m_0\tau_0 + \cdots + m_{n-1}\tau_{n-1}$. Die Einschränkung von σ auf die Untergruppe H zerfällt dann genau in die irreduziblen Darstellungen von H mit maximalen Gewichten $k_0\tau_0 + \cdots + k_{n-1}\tau_{n-1}$, für die gilt*

$$\begin{gathered} m_0 \geq k_1 + k \geq m_1 \geq k_2 + k \geq m_2 \geq \cdots \geq k_{n-1} + k \geq m_{n-1} \geq k \geq 0, \\ k_0 = m_0 + \cdots + m_{n-1} - (k_1 + \cdots + k_{n-1}) - (n+1)k. \end{gathered}$$

Jede dieser Darstellungen kommt dabei mit Vielfachheit 1 vor. □

Daraus erhalten wir jetzt:

Satz 5.10 *Sei $n \geq 3$. Sei σ eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1} mit maximalem Gewicht $m_0\tau_0 + \cdots + m_{n-1}\tau_{n-1}$. Gilt*

$$\begin{aligned} &m_2 = \cdots = m_{n-1} = k \geq l + \frac{n+1}{2}, \\ &k \leq m_1 \leq k + \min\{l,\ k - l - \tfrac{n+1}{2}\} \quad \textit{und} \\ &m_0 = 3k - m_1 - \frac{n+1}{2}, \end{aligned}$$

so ist $\dim \operatorname{Hom}_H(W, V_l) = 1$. *Andernfalls ist* $\operatorname{Hom}_H(W, V_l) = \{0\}$.

Beweis: Nach dem letzten Satz und der Formel für das maximale Gewicht von $(L \circ \tilde{\alpha}, V_l)$ ist die Darstellung genau dann in σ enthalten, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} m_0 \geq l + k \geq m_1 \geq k \geq m_2 \geq \cdots \geq k \geq m_{n-1} \geq k \geq 0 \\ -l - \frac{n+1}{2} = m_0 + \cdots + m_{n-1} - l - (n+1)k \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} m_0 \geq l + k \geq m_1 \geq m_2 = \cdots = m_{n-1} = k \\ -\frac{n+1}{2} = m_0 + m_1 - 3k \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} m_2 = \cdots = m_{n-1} = k, \qquad m_0 = 3k - m_1 - \frac{n+1}{2} \\ l + k \geq m_1 \geq k \\ 2k - m_1 - \frac{n+1}{2} \geq l \end{cases} \\ \Longleftrightarrow &\begin{cases} m_2 = \cdots = m_{n-1} = k, \qquad m_0 = 3k - m_1 - \frac{n+1}{2} \\ k \leq m_1 \leq \min\{l + k,\ 2k - l - \frac{n+1}{2}\} \end{cases} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.11 Für $n = 1$ ist das maximale Gewicht der Darstellung $(L \circ \tilde{\alpha}, V_l)$

$$(-l-1)\tau_0 + l\tau_1 = (-2l-1)\tau_0.$$

Aus Satz 5.9 erhält man, dass eine irreduzible Darstellung (σ, W) von SU_2 zum maximalen Gewicht $m_0\tau_0$ in die Darstellungen mit maximalem Gewicht $(m_0 - 2j)\tau_0$, $j = 0, \dots, m_0$ zerfällt. Daher ist

$$m_0 = 2l + 1 + 2k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

die Bedingung dafür, dass $\dim \operatorname{Hom}_H(W, V_l) = 1$ ist. □

Um für die so bestimmten Darstellungen den Wert des Casimiroperators zu ermitteln, müssen wir jetzt die *Killingform* von $\mathfrak{su}_{n+1}$ betrachten. Sie ist definiert durch

$$\langle X, Y \rangle = \operatorname{Spur}(\operatorname{ad}(X) \circ \operatorname{ad}(Y)), \qquad X, Y \in \mathfrak{su}_{n+1}, \tag{5.7}$$

wobei $\mathrm{ad}(X)Z = [X, Z]$ die adjungierte Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{su}_{n+1}$ ist. Durch dieselbe Formel ist die Killingform auch auf der komplexifizierten Liealgebra

$$(\mathfrak{su}_{n+1})_{\mathbb{C}} = \bigl\{X \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)} \bigm| \operatorname{Spur} X = 0\bigr\}$$

definiert. Für $X \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \subset (\mathfrak{su}_{n+1})_{\mathbb{C}}$ erhält man dann, vergleiche wieder [5, 12],

$$\langle X, X\rangle = 2(n+1)\sum_{j=0}^{n} \tau_j(X)^2 = 2(n+1)\operatorname{Spur}(X^2).$$

Nun ist die Killingform Ad-invariant, d. h. für $g \in SU_{n+1}$ gilt

$$\langle \mathrm{Ad}(g)X, \mathrm{Ad}(g)Y\rangle = \langle X, Y\rangle.$$

Da sich jedes $Y \in \mathfrak{su}_{n+1}$ darstellen lässt als $Y = \mathrm{Ad}(g)iX$ mit $g \in SU_{n+1}$ und $X \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$, folgt

$$\begin{aligned}\langle Y, Y\rangle = \langle iX, iX\rangle &= -\langle X, X\rangle = -2(n+1)\operatorname{Spur}(X^2)\\ &= 2(n+1)\operatorname{Spur}\bigl((iX)^2\bigr) = 2(n+1)\operatorname{Spur}(Y^2).\end{aligned}$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\langle X, Y\rangle &= 2(n+1)\operatorname{Spur}(XY) && \text{für } X, Y \in \mathfrak{su}_{n+1} \text{ und}\\ \langle X, Y\rangle &= 2(n+1)\sum_{j=0}^{n}\tau_j(X)\tau_j(Y) && \text{für } X, Y \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}},\end{aligned} \tag{5.8}$$

da symmetrische Bilinearformen durch ihre zugehörigen quadratischen Formen eindeutig bestimmt sind. Die Killingform auf $\mathfrak{su}_{n+1}$ ist also negativ definit, nämlich das $-4(n+1)$-fache des in (3.4) definierten Skalarprodukts auf $\mathfrak{su}_{n+1}$. Wir können nun die Linearformen auf $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ durch $X \mapsto \langle X, \cdot\rangle$ mit Elementen aus $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ identifizieren. Einem Element

$$X = \frac{1}{2(n+1)}\begin{pmatrix} a_0 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix} \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \qquad (\text{also } a_0 + \cdots + a_n = 0\ !)$$

wird dann die Form

$$\langle X, \cdot\rangle = a_0\tau_o + \cdots + a_n\tau_n$$

zugeordnet, und die Killingform überträgt sich auf $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ mit

$$\langle a_0\tau_0 + \cdots + a_n\tau_n, b_0\tau_0 + \cdots + b_n\tau_n\rangle = \frac{1}{2(n+1)}(a_0b_0 + \cdots + a_nb_n), \tag{5.9}$$

wobei $a_0 + \cdots + a_n = b_0 + \cdots + b_n = 0$.

Bisher haben wir eine Orthonormalbasis bezüglich des der Fubini-Study-Metrik entsprechenden Skalarproduktes (3.4) benutzt, um einen Casimiroperator zu definieren. In der Darstellungstheorie wird stattdessen die Killingform verwendet. Sie liefert durch $X \mapsto \langle X, \cdot \rangle$ eine Identifikation von $\mathfrak{su}_{n+1}$ mit $\mathfrak{su}^*_{n+1}$, und der Casimiroperator einer Darstellung (σ, W) wird definiert als Verkettung von σ_* mit sich selbst unter Verwendung dieser Identifikation,

$$\Omega_K : W \xrightarrow{\sigma_*} \mathfrak{su}^*_{n+1} \otimes W \cong \mathfrak{su}_{n+1} \otimes W \xrightarrow{\sigma_*} W. \tag{5.10}$$

Für eine beliebige Basis $(X_1, \ldots, X_m)$ von $\mathfrak{su}_{n+1}$ erhalten wir dann

$$\sigma_* = \sum_{j=1}^m X_j^* \otimes \sigma_*(X_j) \overset{\cong}{\longmapsto} \sum_{j=1}^m \tilde{X}_j \otimes \sigma_*(X_j) \overset{\sigma_*}{\longmapsto} \sum_{j=1}^m \sigma_*(\tilde{X}_j)\sigma_*(X_j) = \Omega_K$$

für den Casimiroperator, wobei $(X_1^*, \ldots, X_m^*)$ die duale Basis und $\langle \tilde{X}_j, \cdot \rangle = X_j^*$ ist. Ist speziell $(X_1, \ldots, X_m)$ eine Orthonormalbasis bezüglich

$$-\frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(XY) = -\frac{1}{4(n+1)}\langle X, Y \rangle,$$

so folgt $\tilde{X}_j = -\frac{1}{4(n+1)} X_j$ und damit

$$\Omega_K = -\frac{1}{4(n+1)} \sum_{j=1}^m \sigma_*(X_j)^2.$$

Unser Casimiroperator Ω_σ aus Abschnitt 5.2 ist also das $-4(n+1)$-fache von Ω_K.

Im Anhang A beweisen wir den folgenden Satz über den Wert des Casimiroperators:

Satz 5.12 *Für eine irreduzible Darstellung σ von SU_{n+1} zum maximalen Gewicht λ operiert der in (5.10) definierte Casimiroperator Ω_K als Skalar*

$$\langle \lambda, \lambda \rangle + 2\langle \lambda, \delta \rangle.$$

Dabei ist $\delta = \frac{1}{2}\sum_{j<k} \alpha_{jk}$ die halbe Summe der positiven Wurzeln von SU_{n+1}. □

Jetzt können wir die Eigenwerte des auf Spinorfeldern wirkenden Casimiroperators Ω berechnen.

Satz 5.13 *Sei $n \geq 3$. Der Casimiroperator Ω hat auf $\Gamma(Q_l)$ die Eigenwerte*

$$-2(k-j)^2 - 2j(j-1+n) - 2k(k-1+n) + n\frac{n+1}{2},$$

wobei $k, j \in \mathbb{N}$ mit

$$k \geq l + \frac{n+1}{2}, \qquad j = 0, \ldots, \min\{l, k - l - \tfrac{n+1}{2}\}.$$

Die zugehörigen Eigenräume sind endlichdimensional und bilden eine orthogonale Zerlegung von $\Gamma(Q_l)$.

Beweis: Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts zur Frobeniusreziprozität sind es genau die Darstellungen aus Satz 5.10, die nichttriviale Eigenräume von Ω erzeugen. Mit k, j aus der Behauptung sind die zugehörigen maximalen Gewichte dann durch

$$\begin{aligned}\lambda &= (2k-j-\tfrac{n+1}{2})\tau_0 + (k+j)\tau_1 + k\tau_2 + \cdots + k\tau_{n-1} \\ &= (k-j-\tfrac{n}{2})\tau_0 + (j+\tfrac{1}{2})\tau_1 + \tfrac{1}{2}\tau_2 + \cdots + \tfrac{1}{2}\tau_{n-1} + (-k+\tfrac{1}{2})\tau_n\end{aligned}$$

gegeben. Für die halbe Summe der positiven Wurzeln erhalten wir

$$\begin{aligned}\delta &= \frac{1}{2}\sum_{j<k}\tau_j - \tau_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=0}^{n}(n-j)\tau_j - \sum_{k=0}^{n}k\tau_k\right) \\ &= \frac{n}{2}\tau_0 + \left(\frac{n}{2}-1\right)\tau_1 + \cdots - \frac{n}{2}\tau_n.\end{aligned}$$

Dann operiert Ω_σ als Skalar

$$\begin{aligned}&-4(n+1)\big(\langle\lambda,\lambda\rangle + 2\langle\lambda,\delta\rangle\big) \\ &= -2\left((k-j-\tfrac{n}{2})^2 + (j+\tfrac{1}{2})^2 + (n-2)\tfrac{1}{4} + (k-\tfrac{1}{2})^2\right) - 4\Big(\tfrac{n}{2}(k-j-\tfrac{n}{2}) \\ &\quad + (\tfrac{n}{2}-1)(j+\tfrac{1}{2}) + (\tfrac{n}{2}-2)\tfrac{1}{2} + \cdots + (\tfrac{n}{2}-(n-1))\tfrac{1}{2} - \tfrac{n}{2}(-k+\tfrac{1}{2})\Big) \\ &= -2\left((k-j)^2 + \tfrac{n^2}{4} + (j+\tfrac{1}{2})^2 + (n-2)\tfrac{1}{4} + (k-\tfrac{1}{2})^2\right) \\ &\quad - 4\left(-\tfrac{n^2}{4} + (\tfrac{n}{2}-1)(j+\tfrac{1}{2}) + \tfrac{n}{4}(n-2) - \left(\tfrac{n(n-1)}{2}-1\right)\tfrac{1}{2} + \tfrac{n}{2}(k-\tfrac{1}{2})\right) \\ &= -2(k-j)^2 - 2(j+\tfrac{1}{2})^2 - 2(k-\tfrac{1}{2})^2 - 4(\tfrac{n}{2}-1)(j+\tfrac{1}{2}) - 2n(k-\tfrac{1}{2}) \\ &\quad - \tfrac{n^2}{2} - \tfrac{1}{2}(n-2) + 2n + 2\left(\tfrac{n(n-1)}{2}-1\right) \\ &= -2(k-j)^2 - 2j(j+1) - 2k(k-1) - 1 - 2nj + 4j - 2(\tfrac{n}{2}-1) - 2nk + n \\ &\quad - \tfrac{1}{2}(n-2) + 2n + \tfrac{n^2-2n}{2} - 2 \\ &= -2(k-j)^2 - 2j(j-1+n) - 2k(k-1+n) + \tfrac{n^2+n}{2}.\end{aligned}$$

Folgerung 5.6 besagt dann, dass dies die Eigenwerte von Ω auf $\Gamma(Q_l)$ sind und dass die Eigenräume die behaupteten Eigenschaften haben. $\square$

Bemerkung 5.14 Für $n = 1$ haben wir nach der letzten Bemerkung

$$\lambda = (2k-1)\tau_0 = (k-\tfrac{1}{2})\tau_0 - (k-\tfrac{1}{2})\tau_1, \qquad k \geq l+1$$

als maximale Gewichte, die zu Eigenwerten von Ω führen. Die Eigenwerte sind dann

$$\begin{aligned}&-4(n+1)\big(\langle\lambda,\lambda\rangle + 2\langle\lambda,\delta\rangle\big) \\ &\qquad = -2\left((k-\tfrac{1}{2})^2 + (k-\tfrac{1}{2})^2\right) - 4\left(\tfrac{1}{2}(k-\tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2}(k-\tfrac{1}{2})\right) \\ &\qquad = -4(k-\tfrac{1}{2})(k+\tfrac{1}{2}) = -4k^2+1,\end{aligned}$$

also mit $j = 0$ auch von der Form in Satz 5.13. $\square$

Wir fassen jetzt die Ergebnisse zum Spektrum des Operators P zusammen:

Satz 5.15 *Wir betrachten den komplexen projektiven Raum $\mathbb{CP}_n$ für ungerades n und versehen ihn durch die Fubini-Study-Metrik mit der Struktur einer Kähler-Mannigfaltigkeit. Sei $P = i(\tilde{D}D - D\tilde{D})$ der aus den symplektischen Diracoperatoren gebildete Operator zweiter Ordnung. Das Spektrum der Einschränkung von P auf die Teilbündel Q_l des Spinorbündels besteht dann aus den Eigenwerten*

$$2(k-j)^2 + 2j(j+n-1) + 2k(k+n-1) - 3(2l+n)^2 - n(2n-1),$$

wobei $k, j \in \mathbb{N}$ mit

$$k \geq l + \frac{n+1}{2}$$

und

$$j = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ 0, \ldots, \min\{l, k - l - \frac{n+1}{2}\} & \text{für } n \geq 3 \end{cases}$$

ist.

Beweis: Dies folgt sofort aus der in Satz 4.6 hergeleiteten Formel für P und der Rechnung

$$-\frac{3n(n-1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{-4n^2 + 2n}{2} = -n(2n-1).$$

□

5.4 Zusammenfassung

Wir wollen abschließend die Ergebnisse über den Operator P zusammenfassen und diskutieren.

Wir haben gesehen, dass der harmonische Oszillator H_{Osz} eine Aufspaltung des Spinorbündels Q in endlichdimensionale Teilbündel Q_l bewirkt, der Definitionsbereich von P die algebraische direkte Summe $\bigoplus_{l \geq 0} \Gamma(Q_l)$ umfasst und dort die Formel

$$P = -\Omega - 3H_{\text{Osz}}^2 - \frac{3}{2}n(n-1) \tag{5.11}$$

gilt. Nun kennt man für den riemannschen Diracoperator D_{riem} auf kompakten riemannsch-symmetrischen Räumen, also insbesondere $\mathbb{CP}_n$, die Formel

$$D_{\text{riem}}^2 = -\Omega + \frac{1}{8}R,$$

vergleiche [1], wobei R die Skalarkrümmung des Raumes ist. Dies verdeutlicht nocheinmal die Tatsache, dass dem Quadrat des riemannschen Diracoperators im symplektischen Kontext der Operator P entspricht. Da das Teilbündel Q_l ein Eigenraum von H_{Osz} ist, ist die Einschränkung von P auf Q_l bis auf eine additive Konstante gleich $-\Omega$, in exakter Analogie zum riemannschen Fall.

Im 6. Kapitel ihrer Habilitationsschrift hat K. Habermann für den Operator P auf Kähler-Mannigfaltigkeiten mit konstanter holomorpher Schnittkrümmung c die Weitzenböckformel

$$P = \Delta^Q - \frac{c}{2} H^2_{\text{Osz}} + \frac{c}{4} n(n-1)$$

hergeleitet, siehe [3, (6.2.1)]. Δ^Q ist dabei der Bochner-Laplace-Operator des Spinorbündels. Für $\mathbb{CP}_n$ mit der Fubini-Study-Metrik berechnet man als holomorphe Schnittkrümmung $c = 4$. Auch dies stimmt mit der Formel (5.11) überein, wenn man bedenkt, wie im 4. Kapitel die Y_{jk}-, Z_{jk}- und Y_j-Terme des Casimiroperators zu einem Term mit H^2_{Osz} führten.

Mithilfe der induzierten Darstellung konnten wir den Vektorraum $\Gamma(Q_l)$ in die isotypen Komponenten $\Gamma(Q_l, \sigma)$ zerlegen. Versehen wir nun $\Gamma(Q)$ mit dem Skalarprodukt aus (5.3) und bezeichnen mit $\Gamma^2(Q)$ den durch Vervollständigung entstehenden Hilbertraum, so erhalten wir eine orthogonale Zerlegung

$$\Gamma^2(Q) = \widehat{\bigoplus_{l \geq 0}} \widehat{\bigoplus_{\sigma}} \Gamma(Q_l, \sigma).$$

Aus dem Isomorphismus (5.5), der Frobeniusreziprozität und Satz 5.10 ergeben sich die irreduziblen Darstellungen (σ, W) von SU_{n+1}, für die $\Gamma(Q_l, \sigma) \neq \{0\}$ ist, und es gilt dann

$$\dim \Gamma(Q_l, \sigma) = \dim W.$$

Außerdem ist jedes $\Gamma(Q_l, \sigma)$ ein Eigenraum von P, und nach Satz 5.15 sind die Eigenwerte reell. Damit bestätigt sich die formale Selbstadjungiertheit von P. Weiter sieht man, dass das Spektrum von P nach oben und unten unbeschränkt ist. Für den riemannschen Diracoperator (und sein Quadrat) auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit hat man dagegen eine untere Schranke für das Spektrum. Betrachtet man aber die Einschränkung von P auf Q_l, so sind die Eigenwerte auch hier nach unten beschränkt.

Zusammenfassend zeigt also der Operator P ein zu D^2_{riem} weitgehend analoges Verhalten, wobei der wesentliche Unterschied in der Unendlichdimensionalität des Spinorbündels Q liegt. Diese schlägt sich in der Formel (5.11) für P als harmonischer-Oszillator-Term und beim Spektrum in der Unbeschränktheit nach unten nieder. Eine interessante weitergehende Fragestellung wäre, inwieweit sich (5.11), entsprechend der Formel für D^2_{riem}, verallgemeinern lässt auf riemannsche symmetrische Räume, die zusätzlich eine verträgliche komplexe Struktur tragen, d. h. kählersch sind.

Anhang A

Darstellungstheorie

Die Aussage über den Wert des Casimiroperators aus Satz 5.12 und der Satz 5.9 über die Zerlegung einer irreduziblen SU_{n+1}-Darstellung in Darstellungen der Isotropiegruppe H sind zwar wohlbekannt, in den meisten einführenden Lehrbüchern über Darstellungstheorie aber nicht enthalten. Daher werden wir sie in diesem Anhang beweisen. Wir benutzen dabei die Notationen aus Abschnitt 5.3.

Ein grundlegendes Resultat der Darstellungstheorie ist die Formel von Weyl zur Berechnung des Charakters einer irreduziblen Darstellung. Unter dem *Charakter* einer endlichdimensionalen Darstellung σ einer Gruppe G versteht man dabei die Funktion

$$\begin{aligned} \chi_\sigma : \; G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \operatorname{Spur} \sigma(g). \end{aligned}$$

Es gilt dann offenbar $\chi_\sigma(g_0 g g_0^{-1}) = \chi_\sigma(g)$. Da sich jede spezielle unitäre Matrix $g \in SU_{n+1}$ als $g = g_0 t g_0^{-1}$ mit $t \in T$ und $g_0 \in SU_{n+1}$ schreiben lässt, sehen wir, dass der Charakter χ_σ einer Darstellung von SU_{n+1} durch seine Werte auf dem maximalen Torus T festgelegt ist. Dort wiederum ist er mit den Gewichten der Darstellung durch

$$\chi_\sigma(e(X)) = \sum_\lambda e^{2\pi i \lambda(X)}, \qquad X \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}$$

verknüpft. Dabei läuft die Summe über alle Gewichte λ der Darstellung σ.

Als *Weylgruppe* von SU_{n+1} bezeichnet man die Gruppe der inneren Automorphismen von SU_{n+1}, die den maximalen Torus T invariant lassen, die also durch $g \in SU_{n+1}$ mit $gtg^{-1} \in T$ für $t \in T$ gegeben sind. Die Weylgruppe von SU_{n+1} ist dann die symmetrische Gruppe S_{n+1}. Per adjungierter Darstellung operiert ein Element $w \in S_{n+1}$ der Weylgruppe auch auf $\mathfrak{t}_\mathbb{R}$ und damit auf $\mathfrak{t}_\mathbb{R}^*$, und zwar gerade durch

$$w(a_0\tau_0 + \cdots + a_n\tau_n) = a_{w(0)}\tau_0 + \cdots + a_{w(n)}\tau_n.$$

Für ein Element $\alpha \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$\xi_\alpha(X) = \sum_{w \in S_{n+1}} (-1)^w e(w\alpha(X)), \tag{A.1}$$

wobei $e(x) = e^{2\pi i x}$ für $x \in \mathbb{R}$ ist. Speziell für die halbe Summe der positiven Wurzeln δ gilt dann

$$\xi_\delta = \prod_{j<k} \big(e(\alpha_{jk}/2) - e(\alpha_{kj}/2)\big). \tag{A.2}$$

Satz A.1 (Weylsche Charakterformel) *Sei σ eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1} zum maximalen Gewicht λ und sei δ die halbe Summe der positiven Wurzeln von SU_{n+1}. Dann gilt*

$$\xi_\delta(X)\chi_\sigma(e(X)) = \xi_{\lambda+\delta}(X) \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{t}_\mathbb{R}.$$

□

Einen Beweis findet man etwa in [5] oder [12]. Wir können jetzt die Weylsche Charakterformel benutzen, um die Zerlegung einer irreduziblen SU_{n+1}-Darstellung in H-Darstellungen zu untersuchen. Dazu bemerken wir, dass $\alpha_{jk} = \tau_j - \tau_k$ mit $1 \le j < k \le n$ die positiven Wurzeln von H sind. Weiterhin ist die Weylgruppe von H gleich S_n und operiert für Linearformen $a_0\tau_0 + \cdots + a_n\tau_n$ auf den Koeffizienten $a_1, \ldots, a_n$.

Satz A.2 *Sei σ eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1} mit maximalem Gewicht $\lambda = m_0\tau_0 + \cdots + m_{n-1}\tau_{n-1}$. Die Einschränkung von σ auf H zerfällt dann genau in die Darstellungen zum maximalen Gewicht $k_0\tau_0 + \cdots + k_{n-1}\tau_{n-1}$, für die gilt:*

$$\begin{gathered} m_0 \ge k_1 + k \ge m_1 \ge k_2 + k \ge m_2 \ge \cdots \ge k_{n-1} + k \ge m_{n-1} \ge k \ge 0, \\ k_0 = m_0 + \cdots + m_{n-1} - (k_1 + \cdots + k_{n-1}) - (n+1)k. \end{gathered}$$

Jede dieser Darstellungen kommt dabei mit Vielfachheit 1 vor.

Beweis (nach [4]): Für die halbe Summe der positiven Wurzeln von $G = SU_{n+1}$ bzw. H gilt

$$\begin{aligned} \delta_G &= \frac{1}{2} \sum_{0 \le j < k}^{n} \tau_j - \tau_k = \sum_{j=0}^{n} (n-j)\tau_j, \\ \delta_H &= \frac{1}{2} \sum_{1 \le j < k}^{n} \tau_j - \tau_k = \sum_{j=0}^{n} (n-j)\tau_j - \frac{n+1}{2}\tau_0. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\begin{aligned} p_j &= m_j + n - j \qquad \text{für } j = 0, \ldots, n-1 \text{ und} \\ p_n &= 0, \end{aligned}$$

so gilt

$$\lambda + \delta_G = p_0\tau_0 + \cdots + p_n\tau_n,$$

und wir können die alternierende Summe (A.1) für $\lambda+\delta_G$ als Determinante schreiben:

$$\begin{aligned}
\xi_{\lambda+\delta_G} &= \begin{vmatrix} e(p_0\tau_0) & \cdots & e(p_0\tau_n) \\ \vdots & & \vdots \\ e(p_{n-1}\tau_0) & \cdots & e(p_{n-1}\tau_n) \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= e\left((p_0+\cdots+p_{n-1})\tau_0\right) \begin{vmatrix} 1 & e(p_0(\tau_1-\tau_0)) & \cdots & e(p_0(\tau_n-\tau_0)) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & e(p_{n-1}(\tau_1-\tau_0)) & \cdots & e(p_{n-1}(\tau_n-\tau_0)) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n e(P\tau_0) \begin{vmatrix} e(p_0\alpha_{10})-1 & \cdots & e(p_0\alpha_{n0})-1 \\ \vdots & & \vdots \\ e(p_{n-1}\alpha_{10})-1 & \cdots & e(p_{n-1}\alpha_{n0})-1 \end{vmatrix} \qquad \text{mit } P = p_0+\cdots+p_{n-1} \\
&= (-1)^n e(P\tau_0) \prod_{j=1}^n (e(\alpha_{j0})-1) \begin{vmatrix} \sum\limits_{q_0=0}^{p_0-1} e(q_0\alpha_{10}) & \cdots & \sum\limits_{q_0=0}^{p_0-1} e(q_0\alpha_{n0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} e(q_{n-1}\alpha_{10}) & \cdots & \sum\limits_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} e(q_{n-1}\alpha_{n0}) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n e(P\tau_0) \prod_{j=1}^n (e(\alpha_{j0})-1) \begin{vmatrix} \sum\limits_{q_0=p_1}^{p_0-1} e(q_0\alpha_{10}) & \cdots & \sum\limits_{q_0=p_1}^{p_0-1} e(q_0\alpha_{n0}) \\ \sum\limits_{q_1=p_2}^{p_1-1} e(q_1\alpha_{10}) & \cdots & \sum\limits_{q_1=p_2}^{p_1-1} e(q_1\alpha_{n0}) \\ \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} e(q_{n-1}\alpha_{10}) & \cdots & \sum\limits_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} e(q_{n-1}\alpha_{n0}) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^n e(P\tau_0) \prod_{j=1}^n (e(\alpha_{j0})-1) \sum_{q_0=p_1}^{p_0-1} \cdots \sum_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} \det\big(e(q_j\alpha_{k0})\big)_{(j,k)\in I}
\end{aligned}$$

Dabei ist $I = \{0,\ldots,n-1\} \times \{1,\ldots,n\}$. Nun gilt die Charakterformel von Weyl auch für die Untergruppe H, die alternierende Summe (A.1) wird dabei bezüglich der Weylgruppe S_n von H gebildet,

$$\xi_\alpha^H = \sum_{w\in S_n} (-1)^w e(w\alpha).$$

Für die Wurzeln von H gilt die (A.2) entsprechende Formel

$$\xi_{\delta_H}^H = \prod_{1\le j<k}^n \big(e(\alpha_{jk}/2) - e(\alpha_{kj}/2)\big),$$

und damit folgt

$$\frac{\xi_{\delta_H}^H}{\xi_{\delta_G}} = (-1)^n \prod_{k=1}^n e(\alpha_{k0}/2)(e(\alpha_{k0})-1)^{-1}.$$

Die Weylsche Charakterformel liefert dann:

$$\begin{aligned}
\xi^H_{\delta_H}\chi_\sigma \circ e &= \frac{\xi^H_{\delta_H}}{\xi_{\delta_G}}\xi_{\lambda+\delta_G} \\
&= e\big(P\tau_0 + \tfrac{1}{2}(\underbrace{\alpha_{10} + \cdots + \alpha_{n0}}_{-(n+1)\tau_0})\big) \sum_{q_0=p_1}^{p_0-1} \cdots \sum_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} \det\big(e(q_j\alpha_{k0})\big)_{(j,k)\in I} \\
&= \sum_{q_0=p_1}^{p_0-1} \cdots \sum_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-1} e\big((P - \tfrac{n+1}{2} - q_0 - \cdots - q_{n-1})\tau_0\big) \det\big(e(q_j\tau_k)\big)_{(j,k)\in I}
\end{aligned}$$

Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned}
k &= q_{n-1}, \\
k_j + k + n - j &= q_{j-1} \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n-1, \\
k_0 + k + n &= p_0 + \cdots + p_{n-1} - q_0 - \cdots - q_{n-1},
\end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\xi^H_{k_0\tau_0+\cdots+k_{n-1}\tau_{n-1}+\delta_H} &= \xi^H_{(k_0+k)\tau_0+\cdots+(k_{n-1}+k)\tau_{n-1}+k\tau_n+\delta_H} \\
&= e\big((k_0 + k + n - \tfrac{n+1}{2})\tau_0\big) \begin{vmatrix} e((k_1+k+n-1)\tau_1) & \cdots & e((k_1+k+n-1)\tau_n) \\ \vdots & & \vdots \\ e((k_{n-1}+k+1)\tau_1) & \cdots & e((k_{n-1}+k+1)\tau_n) \\ e(k\tau_1) & \cdots & e(k\tau_n) \end{vmatrix} \\
&= e\big((P - q_0 - \cdots - q_{n-1} - \tfrac{n+1}{2})\tau_0\big) \det\big(e(q_j\tau_k)\big)_{(j,k)\in I}
\end{aligned}$$

also

$$\xi^H_{\delta_H}\chi_\sigma \circ e = \sum \xi^H_{k_0\tau_0+\cdots+k_{n-1}\tau_{n-1}+\delta_H}$$

wobei die Summe über alle natürlichen Zahlen $k_0, \ldots, k_{n-1}$ läuft, die

$$\begin{gathered}
m_0 \geq k_1 + k \geq m_1 \geq k_2 + k \geq m_2 \geq \cdots \geq k_{n-1} + k \geq m_{n-1} \geq k \geq 0, \\
k_0 = m_0 + \cdots + m_{n-1} - (k_1 + \cdots + k_{n-1}) - (n+1)k
\end{gathered}$$

erfüllen. Mit der Weylschen Charakterformel für H folgt dann die Behauptung. □

Wenden wir uns jetzt dem in (5.10) mit Hilfe der Killingform zu einer Darstellung σ definierten Casimiroperator Ω_K zu. Zuerst wollen wir zeigen, dass Ω_K mit der Darstellung vertauscht, d. h. es gilt

$$\Omega_K \circ \sigma(g) = \sigma(g) \circ \Omega_K \qquad \text{für alle } g \in SU_{n+1}.$$

Sei dazu $(X_1, \ldots, X_m)$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{su}_{n+1}$ bezüglich des durch die Killingform gegebenen Skalarproduktes $-\langle \cdot, \cdot \rangle$. Der Casimiroperator ist dann von der Form $\Omega_K = -\sum_{j=1}^m \sigma_*(X_j)^2$, und wir rechnen

$$\begin{aligned}
\sigma(g)\Omega_K\sigma(g^{-1}) &= -\sum_{j=1}^m \sigma(g)\sigma_*(X_j)^2\sigma(g^{-1}) \\
&= -\sum_{j=1}^m \big(\sigma(g)\sigma_*(X_j)\sigma(g^{-1})\big)^2 = -\sum_{j=1}^m \sigma_*(gX_jg^{-1})^2.
\end{aligned}$$

Wegen der Ad-Invarianz der Killingform ist nun $(gX_1g^{-1}, \dots, gX_mg^{-1})$ wieder eine Orthonormalbasis und der letzte Ausdruck der obigen Rechnung daher gleich Ω_K. Dies zeigt die behauptete Kommutativität, und nach dem Schurschen Lemma ist für eine irreduzible Darstellung σ der Casimiroperator ein Vielfaches der Identität.

Um jetzt den Wert des Casimiroperators zu berechnen, benötigen wir noch eine Eigenschaft des maximalen Gewichts einer irreduziblen Darstellung. Sei dazu E_{jk} für $j, k = 0, \dots, n$ die $(n+1) \times (n+1)$-Matrix mit einer Eins an Position (j, k) und Nullen sonst. Für $j \neq k$ ist dann E_{jk} ein sogenannter *Wurzelvektor* der Wurzel α_{jk} von SU_{n+1}, d. h.

$$[X, E_{jk}] = \alpha_{jk}(X)E_{jk} \qquad \text{für } X \in \mathfrak{t}_{\mathbb{R}}.$$

Sei jetzt σ eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1}, das Differential σ_* durch Komplexifizieren auf $(\mathfrak{su}_{n+1})_{\mathbb{C}}$ fortgesetzt und v ein Element des Gewichtsraumes des maximalen Gewichts von σ. Für die positiven Wurzelvektoren gilt dann

$$\sigma_*(E_{jk})v = 0, \qquad j < k,$$

vergleiche [5]. Daraus erhalten wir jetzt:

Satz A.3 *Sei (σ, W) eine irreduzible Darstellung von SU_{n+1}. Dann gilt für den Casimiroperator*

$$\Omega_K = (\langle\lambda, \lambda\rangle + 2\langle\lambda, \delta\rangle)id_W,$$

wobei λ das maximale Gewicht von σ und δ die halbe Summe der positiven Wurzeln von SU_{n+1} ist.

Beweis: Zunächst bemerken wir, dass derselbe Casimiroperator entsteht, wenn man in der Definition (5.10) $\mathfrak{su}_{n+1}$ durch $(\mathfrak{su}_{n+1})_{\mathbb{C}}$ ersetzt und σ_* als das komplexifizierte Differential von σ versteht. Wir wählen dann eine Basis von $(\mathfrak{su}_{n+1})_{\mathbb{C}}$ bestehend aus einer Orthonormalbasis $(X_1, \dots, X_n)$ von $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ und den E_{jk} mit $j \neq k$. Es gilt also

$$\langle X_j, X_k\rangle = \delta_{jk}, \quad \langle E_{jk}, X_l\rangle = 0, \qquad \langle E_{jk}, E_{kj}\rangle = 2(n+1)$$

und

$$\langle E_{jk}, E_{lm}\rangle = 0 \quad \text{für } (l, m) \neq (k, j),$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Omega_K &= \sum_{j=1}^{n} \sigma_*(X_j)^2 + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j<k} \underbrace{\sigma_*(E_{jk})\sigma_*(E_{kj})}_{\sigma_*([E_{jk},E_{kj}])+\sigma_*(E_{kj})\sigma_*(E_{jk})} + \sigma_*(E_{kj})\sigma_*(E_{jk}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sigma_*(X_j)^2 + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j<k} \sigma_*(E_{jj} - E_{kk}) + \frac{1}{n+1} \sum_{j<k} \sigma_*(E_{kj})\sigma_*(E_{jk}).
\end{aligned}$$

Dies wenden wir jetzt auf ein Element $v \neq 0$ des Gewichtsraumes zum maximalen Gewicht λ an. Nach der Bemerkung über positive Wurzelvektoren fällt dann die letzte Summe weg, und es bleibt

$$\Omega_K v = \sum_{j=1}^{n} \lambda(X_j)^2 v + \frac{1}{2(n+1)} \sum_{j<k} \lambda(E_{jj} - E_{kk}) v.$$

Nun gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda(X_j)^2 = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda(X_j) X_j^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda(X_j) X_j^* \Big\rangle = \langle \lambda, \lambda \rangle,$$

da die duale Basis $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ eine orthonormale Basis von $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ ist, sowie

$$\frac{1}{2(n+1)} \sum_{j<k} \lambda(E_{jj} - E_{kk}) = \sum_{j<k} \langle \lambda, \alpha_{jk} \rangle = 2\langle \lambda, \delta \rangle,$$

da $\frac{1}{2(n+1)} \langle E_{jj} - E_{kk}, \cdot \rangle = \alpha_{jk}$. Wir wissen schon, dass Ω_K als Multiplikation mit einem Skalar wirkt, und $\langle \lambda, \lambda \rangle + 2\langle \lambda, \delta \rangle$ ist dann dieser Skalar. $\square$

Literaturverzeichnis

[1] T. Friedrich. *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*. Vieweg, Braunschweig, 1997.

[2] K. Habermann. *Basic Properties of Symplectic Dirac Operators*. Commun. Math. Phys. **184**, 629-652, 1997.

[3] K. Habermann. *Dirac-Operatoren für symplektische Mannigfaltigkeiten*. Habilitationsschrift, Ruhr-Universität Bochum, 1998.

[4] A. Ikeda and Y. Taniguchi. *Spectra and Eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbb{C})$*. Osaka J. Math. **15**, 515-546, 1978.

[5] A. W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*. Birkhäuser, Boston, 1996.

[6] S. Kobayashi, K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*, Volume I and II. Interscience, New York, 1963.

[7] S. Lang. *Differential and Riemannian Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[8] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Clarendon Press, Oxford, 1995.

[9] T. Okubo. *Differential Geometry*. Marcel Dekker, inc., New York, 1987.

[10] A. Robert. *Introduction to the Representation Theory of Compact and Locally Compact Groups*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[11] D. Shale. *Linear Symmetries of free Boson Fields*. Trans. Amer. Math. Soc. **103**, 149-167, 1962.

[12] B. Simon. *Representations of Finite and Compact Groups*. American Mathematical Society, 1996.

[13] V. S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations*. Prentice-Hall, inc., New Jersey, 1974.

[14] N. R. Wallach. *Symplectic Geometry and Fourier Analysis*. Math Sci Press, Brookline, 1977.

[15] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, 3. Auflage, Berlin, 2000.