BERGISCHE
UNIVERSITÄT
WUPPERTAL

Analysis I

Jochen Glück

Vorlesungsmanuskript
Wintersemester 2024/25

Version: 21. April 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Die reellen und komplexen Zahlen **3**
- 1.1 Aussagen und Mengen . . . 3
- 1.2 Die reellen Zahlen und ihre Anordnung . . . 8
- 1.3 Komplexe Zahlen . . . 16
- 1.4 Addendum: Existenz und Eindeutigkeit von Quadratwurzeln . . . 20
- 1.5 Addendum: Weitere interessante Eigenschaften der Anordnung von $\mathbb{R}$ 22

2 Reelle und komplexe Funktionen **23**
- 2.1 Stetige Funktionen . . . 23
- 2.2 Konvexe und konkave Funktionen . . . 29
- 2.3 Wurzeln und rationale Exponenten . . . 31
- 2.4 Addendum: Konvexität von Monomfunktionen . . . 34

3 Folgen, Reihen und Konvergenz **37**
- 3.1 Konvergenz von Folgen . . . 37
- 3.2 Konvergenz von Teilfolgen . . . 41
- 3.3 Konsequenzen für stetige Funktionen . . . 43
- 3.4 Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior . . . 46
- 3.5 Cauchy-Folgen und Unendliche Reihen . . . 48

4 Funktionenfolgen und -reihen **57**
- 4.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz . . . 57
- 4.2 Reihen von Funktionen und Potenzreihen . . . 59
- 4.3 Die Exponentialfunktion . . . 61
- 4.4 Addendum: Beweis von Theorem 4.1.7 . . . 62

5 Differentialrechnung **65**
- 5.1 Änderungsraten und Ableitungen . . . 65
- 5.2 Der Mittelwertsatz . . . 70
- 5.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und reelle Exponenten . . . 74
- 5.4 Höhere Ableitungen und Taylorentwicklung . . . 78
- 5.5 Kurvendiskussion . . . 83
- 5.6 Die trigonometrischen Funktionen . . . 86
- 5.7 Addendum: Technische Details zur Taylorentwicklung . . . 90

6 Integralrechnung **93**
6.1 Das Riemann-Integral 93
6.2 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung 97

Literaturverzeichnis **105**

Einleitung

Notation

Folgende Notation wird im Manuskript durchgehend verwendet:

Notation	Bedeutung
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$
m, n, p	Elemente von $\mathbb{N}$

Vorsicht: Fehler!

Dieses Manuskript enthält mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit Fehler. Mit hoher Wahrscheinlichkeit enthält es sogar viele Fehler. Wenn Sie glauben, einen Fehler entdeckt zu haben: Geben Sie mir bitte Bescheid (wirklich!), am einfachsten per E-Mail.

E-Mail-Adresse: glueck@uni-wuppertal.de

Literatur

Es ist oft klug, die Vorlesungsunterlagen durch weitere Literatur zu ergänzen. Das kann Ihnen nochmals eine andere Perspektive auf die Kursinhalte verschaffen. Es gibt eine Vielzahl an Lehrbüchern zur *Analysis 1* – manchmal auch *Analysis in einer Veränderlichen* genannt –, zu denen Sie zum Beispiel durch die Universitätsbibliothek Zugang erhalten (in dem Sie das Buch dort ausleihen oder in dem Sie eine elektronische Version des Buchs, die von der Bibliothek lizenziert wurde, herunterladen).

Zwei Klassiker sind zum Beispiel die beiden Bücher [For16] und [Kön04]. Eine sehr umfangreiche Darstellung der Analysis 1 finden Sie zum Beispiel auch in [SW03].

Bitte beachten Sie, dass es viele verschiedene Arten gibt, den Lernstoff der Analysis 1 darzustellen. In jedem Buch werden Sie einen etwas anderen Zugang und eine etwas andere Präsentation finden (und auch die Inhalte selbst werden sich oft an der ein oder anderen Stelle etwas unterscheiden). Dieses Vorlesungsmanuskript orientiert sich nicht an einem bestimmten Buch, sondern – wie es für viele mathematische Lehrveranstaltungen an deutschen Unis üblich ist – an den Vorstellungen[1] des Dozenten.

Ein Punkt, der in diesem Manuskript (und der zugehörigen Vorlesung) anders ist als in einigen Analysis 1-Büchern, ist die Anordnung des Stoffes am Anfang: Wir besprechen zuerst stetige Funktionen und anschließend Folgen, während es in Büchern oft anders herum gemacht wird. Letztlich sind solchen Entscheidungen natürlich Geschmacksfrage und ein bisschen Varianz in der Literatur und Lehre ist eine gute Sache.

Stand

Diese Version des Manuskript stammt vom 21. April 2025.

[1] Oder Marotten?

Kapitel 1

Die reellen und komplexen Zahlen

1.1 Aussagen und Mengen

Bevor wir uns in den Abschnitten 1.2 und 1.3 näher mit den reellen und den komplexen Zahlen beschäftigen, besprechen wir im aktuellen Abschnitt ein paar Grundlagen. Mathematische Ergebnisse werden mit Hilfe von Aussagen formuliert und häufig benutzt man bei ihrer Formulierung Mengen. Lassen Sie uns deshalb damit beginnen, Aussagen und Mengen zu diskutieren.

Vorlesung 1 (Fr, 11.10.) beginnt ab Abschnitt 1.1

Definition 1.1.1 (Aussagen)**.** Eine **Aussage** ist ein sprachlicher Ausdruck, von dem eindeutig feststeht, ob er wahr oder falsch ist.

Beispiele 1.1.2 (Aussage oder nicht?)**.** (a) "*Helmut Kohl war ein deutscher Bundeskanzler*" ist eine Aussage. Sie ist wahr.

(b) "*Helmut Kohl war ein guter Bundeskanzler*" ist keine Aussage (im Sinne der Mathematik), denn ob diese Behauptung stimmt oder nicht, ist Ansichtssache.

(c) "*Hillary Clinton war eine deutsche Bundeskanzlerin*" ist eine Aussage. Sie ist falsch.

(d) "*Bonnie und Clyde*" ist keine Aussage, denn zwei Personen sind weder wahr noch falsch.

(e) "$2 + 3 = 8$" ist eine Aussage. Sie ist falsch.

(f) "$2 + 3$" ist keine Aussage, denn dieser Ausdruck ist weder wahr noch falsch.

Mathematik besteht im Prinzip daraus, wahre Aussagen über mathematische Objekte zu machen und zweifelsfrei zu begründen – in der Mathematik sagt man dazu **beweisen** –, dass diese Aussagen tatsächlich wahr sind. Es ist dabei bequem, nicht bei jeder wahren Aussage, die man macht, extra dazu sagen zu müssen, dass sie wahr ist. Deshalb verwendet man die folgende Vereinbarung: Wenn man eine mathematische Aussage aufschreibt ohne ihren Wahrheitswert zu spezifizieren, dann möchte man damit ausdrücken, dass die Aussage wahr ist. Wir können also zum Beispiel einfach schreiben

$$2 + 3 = 5$$

und meinen damit

Die Aussage "$2 + 3 = 5$" ist wahr.

So sind Sie es vermutlich auch gewohnt, im täglichen Leben mit Aussagen umzugehen. Wenn Ihre Kommilitonen und Kommilitoninnen sich beispielsweise wundern, weshalb Sie in der Vorlesung einschlafen, könnte Ihre Antwort zum Beispiel lauten

Ich habe die halbe Nacht Netflix geguckt.

Man geht dann davon aus, dass das wahr ist, obwohl Sie üblicherweise nicht sagen

Die Aussage "Ich habe die halbe Nacht Netflix geguckt" wahr.

Um auszudrücken, dass eine Aussage wahr ist, können Sie die Aussage also einfach hinschreiben ohne das Wort"wahr" explizit zu benutzen.

Definition 1.1.3 (Logische Verknüpfungen von Aussagen)**.** Für zwei Aussagen A und B definieren wir mehrere neue Aussagen, die wir mit folgenden Schreibweisen abkürzen:

(a) Die Schreibweise $A \wedge B$ steht für "A und B sind beide wahr."

(b) Die Schreibweise $A \vee B$ steht für "A ist wahr oder B ist wahr"; anders ausgedrückt steht $A \vee B$ also für "Mindestens eine der beiden Aussagen A, B ist wahr."[1]

(c) Die Schreibweise $A \dot{\vee} B$ steht für "Genau eine der beiden Aussagen A, B ist wahr."[2]

Hinweis:
In (d) gab es in der ersten Manuskriptversion (vom 10. Oktober) einen verwirrenden Tippfehler: Dort stand $\vee A$ anstelle von $\neg A$.

(d) Die Schreibweise $\neg A$ steht wir "nicht A", da heißt $\neg A$ ist wahr, wenn A falsch ist, und $\neg A$ ist falsch, wenn A wahr ist.

(e) Die Schreibweise $A \Rightarrow B$ steht für "Falls A wahr ist, dann ist auch B wahr" – anders ausgedrückt für "Aus A folgt B".

Den Pfeil $\Rightarrow$ bezeichnet man als **Implikationspfeil** oder **Folgepfeil** und die Aussage "$A \Rightarrow B$" bezeichnet man als eine **Implikation**.

Anstelle von $A \Rightarrow B$ verwendet man gleichbedeutend auch die Notation $B \Leftarrow A$.

[1] Beim Symbol $\vee$ handelt es sich also um das sogenannte **inklusives Oder**.
[2] Das Symbol $\dot{\vee}$ bezeichnet also das **exklusives Oder**.

(f) Die Schreibweise $A \Leftrightarrow B$ steht für "*A ist gleichbedeutend zu B*" – anders ausgedrückt für "A hat denselben Wahrheitswert wie B".

Anstelle von "gleichbedeutend" sagt man oft auch "äquivalent" und den Pfeil $\Leftrightarrow$ bezeichnet man deshalb als **Äquivalenzpfeil**.

Proposition 1.1.4 (Einige Regeln für die Verknüpfung von Aussagen)**.** *Seien A, B, C Aussagen. Die folgenden Aussagen sind stets wahr (unabhängig davon, welcher der Aussagen A, B, C wahr sind):*

(a) $A \dot\vee \neg A$

(b) $\neg(A \wedge B) \ \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(c) $\neg(A \vee B) \ \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

(d) $(A \Rightarrow B) \ \Leftrightarrow \ (\neg B \Rightarrow \neg A)$

*Die Implikation $\neg B \Rightarrow \neg A$ bezeichnet man als die **Kontraposition** zur Implikation $A \Rightarrow B$. Eine Implikation und ihre Kontraposition sind also immer gleichbedeutend.*

Beweis. Den Beweis kann man mit Hilfe von sogenannten **Wahrheitstafeln** (oder **Wahrheitstabellen**) führen. Dies gehört zur Vorlesung *Grundlagen der Mathematik*. Falls Sie diese Vorlesung nicht hören und trotzdem sehen möchten, wie das funktioniert, können Sie Details zu Wahrheitstabellen zum Beispiel im Vorlesungsmanuskript [Glü24, Abschnitt 1.2] nachlesen. □

Definition 1.1.5 (Menge)**.** Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung von Objekten zu einem neuen Objekt M, wobei man die Reihenfolge der Objekte ignoriert und ein Objekt nicht mehrfach in die Mengen aufgenommen werden darf.

Diejenigen Objekte, die man zur Menge M zusammengefasst hat, nennt man die **Elemente von M**. Für ein Objekt x benutzt man die Kurzschreibweise $x \in M$ für die Aussage "x ist ein Element von M."[3]

Beispiele 1.1.6 (Beispiele und Schreibweisen für Mengen)**.**

(a) Mit $\emptyset$ oder $\{\}$ bezeichnen wir die **leere Menge**. Sie enthält kein Element.

(b) Mit $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ bezeichnen wir die Menge der **natürlichen Zahlen**, mit $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ die Menge, die die natürlichen Zahlen und die Null enthält, und mit $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der ganzen Zahlen.

(c) Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ sei eine Aussage $A(x)$ gegeben. Dann

Vorlesung 2 (Mi, 16.10.) beginnt ab Beispiel 1.1.6(c)

[3] Wenn man genau ist, treten hier ein paar Subtilitäten auf, die zu Schwierigkeiten führen können: Mit dieser – etwas vagen – Definition ist nämlich nicht immer sichergestellt, dass wirklich für jede Menge M und jedes Objekt x klar ist, ob x ein Element von M ist oder nicht. Damit wäre "$x \in M$" also nicht immer eine Aussage. Diese Schwierigkeit wollen wir in den Einstiegsvorlesungen aber etwas unter den Teppich kehren – oder sagen wir eleganter, wir wollen die Schwierigkeit umgehen – und einigen uns deshalb darauf, dass wir nur dann von einer Menge M sprechen wollen, wenn für jedes Objekt x klar ist, ob es ein Element von M ist oder nicht.

bezeichnet die Schreibweise

$$\big\{x \in X \mid A(x)\big\}$$

die Menge, die aus all denjenigen $x \in X$ besteht, für die $A(x)$ wahr ist.

(d) Mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnen wir die Menge der reellen Zahlen und mit dem Symbol $\mathbb{Q} := \{\frac{n}{z} \mid n, z \in \mathbb{Z} \text{ such that } z \neq 0\}$ die Menge der rationalen Zahlen.[4]

Definition 1.1.7 (Inklusionen und Gleichheit von Mengen)**.** Seien M und N Mengen.

(a) Mit der Schreibweise $M \subseteq N$ (oder $N \supseteq M$) bezeichnet man die Aussage "Jedes Element von M ist auch ein Element von N." Falls diese Aussage wahr ist, sagt man, M ist eine **Teilmenge** von N (oder N ist eine **Obermenge** von M).

Die Aussage $M \subseteq N$ (beziehungsweise $N \supseteq M$) bezeichnet man als eine **Inklusion**.

(b) Die beiden Mengen M und N nennt man **gleich** – und schreibt die als $M = N$ – falls M und N genau die gleichen Elementen haben.

Anders ausgedrückt ist die Aussage $M = N$ gleichbedeutend mit der Aussage $M \subseteq N \ \wedge \ M \supseteq N$.

Beispiele 1.1.8 (Einige Inklusionen und Mengengleichheiten)**.**

(a) Es gilt $\mathbb{N} = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \geq 1\}$.

(b) Es gilt $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

Beide Inklusionen zugleich kann man auch ausdrücken, in dem man kürzer $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ schreibt.

(c) Es gilt nicht $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Z}$. Das kann man auch zum Ausdruck bringen, indem man $\mathbb{Q} \not\subseteq \mathbb{Z}$ schreibt.

(d) Es gilt weder $\{-\frac{1}{2}, 3\} \subseteq \mathbb{Z}$ noch $\mathbb{Z} \subseteq \{-\frac{1}{2}, 3\}$.

Definition 1.1.9 (Quantoren)**.** Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ sei eine Aussage $A(x)$ gegeben. Man definiert die folgenden Schreibweisen:

[4] Hier haben wir eine Kurzschreibweise zur Beschreibung von Mengen verwendet, die man noch genauer erklären kann, sobald wir in Definition 1.1.9 Quantoren einführen. Mit Hilfe des Existenzquantors kann man die Menge $\{\frac{n}{z} \mid n, z \in \mathbb{Z} \wedge z \neq 0\}$ nämlich – noch etwas genauer – ausdrücken als

$$\Big\{x \mid \exists n, z \in \mathbb{Z} \text{ derart, dass } z \neq 0 \text{ und } x = \frac{n}{z}\Big\}.$$

(a) Die Schreibweise $\forall x \in X\ A(x)$ steht für "Für alle $x \in X$ ist $A(x)$ wahr."

(b) Die Schreibweise $\exists x \in X\ A(x)$ steht für "Es gibt mindestens ein $x \in X$, für das $A(x)$ wahr ist."

(c) Die Schreibweise $\exists ! x \in X\ A(x)$ steht für "Es gibt genau ein $x \in X$, für das $A(x)$ wahr ist."

Beispiele 1.1.10 (Einige Aussagen mit Quantoren)**.**

(a) Die Aussage "$\forall x \in \mathbb{N}\ x^2 \leq 4x$" ist falsch, denn beispielsweise für $x = 5$ gilt nicht $x^2 = 25$, aber $4x = 20$, und somit $\neg(x^2 \leq 4x)$ für dieses x.

(b) Die Aussage "$\exists x \in \mathbb{N}\ x^2 \leq 4x$" ist wahr, denn beispielsweise für $x = 1$ gilt $x^2 = 1 < 4 = 4x$.

(c) Die Aussage "$\exists ! x \in \mathbb{N}\ x^2 \leq 4x$" ist falsch, denn es gibt mindestens zwei Zahlen $x \in \mathbb{N}$, die diese Ungleichung erfüllen – beispielsweise die Zahlen 1 und 2.

Bemerkung 1.1.11 (Verneinung von Aussagen mit Quantoren)**.** Sei X eine Menge und für jedes $x \in X$ sei eine Aussage $A(x)$ gegeben. Dann gilt

$$\neg\big(\forall x \in X\ A(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in X\ \neg A(x)$$

und

$$\neg\big(\exists x \in X\ A(x)\big) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in X\ \neg A(x)$$

Beispiel 1.1.12 (Eine Aussage mit Quantoren und ihre Verneinung)**.** Die erste Äquivalenz in Bemerkung 1.1.11 hatten wir stillschweigend bereits in Beispiel 1.1.10(a) verwendet. Um zu begründen, dass die Aussage

$$\forall x \in \mathbb{N}\ x^2 \leq 4x$$

falsch ist, hatten wir nämlich gezeigt, dass die Aussage

$$\exists x \in \mathbb{N}\ \neg(x^2 \leq 4x)$$

wahr ist – und dies ist genau die Verneinung der Aussage, die wir widerlegen wollten.

Wir beenden den Abschnitt mit der folgenden Definition, die sie bereits in den Übungsgruppen gesehen haben und die wir deshalb in der Vorlesung nicht besprechen:

Definition 1.1.13 (Vereinigung, Durchschnitt und Differenz)**.** Seien L, M Mengen.

(a) Die Menge $L \cup M := \{x \mid\ x \in L\ \vee\ x \in M\}$ heißt die **Vereinigung** von L und M.

(b) Die Menge $L \cap M := \{x \mid\ x \in L\ \wedge\ x \in M\}$ heißt der **Durchschnitt** oder der **Schnitt** von L und M.

(c) Die Menge $L \setminus M := \{x \in L \mid\ x \notin M\}$ heißt die **mengentheoretische Differenz** oder kurz die **Differenz** von L und M.

1.2 Die reellen Zahlen und ihre Anordnung

Die Menge der reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}$.[5] Wie Sie bereits aus der Schule wissen, kann man reelle Zahlen addieren und multiplizieren. Außerdem wissen Sie bereits, dass man reelle Zahlen der Größe nach vergleichen kann. Diesen Größenvergleich notiert man mit dem Symbol $\leq$: Für $a, b \in \mathbb{R}$ schreibt man $a \leq b$ um zu sagen, dass a kleiner oder gleich b ist. Die folgenden – sehr anschaulichen – Eigenschaften werden wir ständig benutzen.

Axiome 1.2.1 (Ordnung der reellen Zahlen)**.** Es gelten die folgenden Eigenschaften für die Ordnung der reellen Zahlen:

(I) **Reflexivität**: $\forall x \in \mathbb{R}: \; x \leq x$

(II) **Antisymmetrie**: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; (x \leq y \;\wedge\; y \leq x \quad \Rightarrow \quad x = y)$

(III) **Transitivität**: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}: \; (x \leq y \;\wedge y \leq z \quad \Rightarrow \quad x \leq z)$

(IV) **Totalität**: $\forall x, y \in \mathbb{R}: \; x \leq y \;\vee\; y \leq x$

Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ verwendet man die Notation $y \geq x$ gleichbedeutend mit $x \leq y$. Man schreibt $x < y$ (oder $y > x$) um zu sagen, dass $x \leq y$ und $x \neq y$ ist.

Im Folgenden wiederholen wir, wie diese Ordnung der reellen Zahlen mit der Addition und Multiplikation zusammenhängt. Bemerkenswerter Weise kann man alle Regeln dafür, wie man beim Addieren und Multiplizieren reeller Zahlen mit Ungleichungen umgehen darf, aus den folgenden wenigen Axiomen herleiten:

Vorlesung 3 (Fr, 18.10.) beginnt ab den Axiomen 1.2.2

Axiome 1.2.2 (Zusammenhang zwischen Ordnung und algebraischen Operationen auf $\mathbb{R}$)**.** Es gelten die folgenden Eigenschaften:

(I) $\forall a, x, y \in \mathbb{R}: \; (x \leq y \quad \Rightarrow \quad a + x \leq a + y)$

(II) $\forall a, b \in \mathbb{R}: \; (a \geq 0 \;\wedge\; b \geq 0 \quad \Rightarrow \quad ab \geq 0)$

Proposition 1.2.3 (Konsequenzen für die Ordnung und die algebraischen Operationen auf $\mathbb{R}$, Teil 1)**.** *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $a \leq b$ and $x \leq y$ ist, dann ist $a + x \leq b + y$.*

[5]In dieser Vorlesung stellen wir uns auf den Standpunkt, dass Sie die reellen Zahlen bereits kennenaus der Schule kennen. Im folgenden besprechen wir, wie man die Ordnungseigenschaften reeller Zahlen axiomatisch behandeln kann. Die axiomatische Behandlung der algebraischen Eigenschaften der reellen Zahlen lernen Sie in der Vorlesung *Grundlagen der Mathematik*, wenn der Begriff des **Körpers** definiert wird.

Übrigens unterschlagen wir hier zwei eigentlich sehr wichtige Fragen, nämlich die nach der **Existenz** und nach der **Eindeutigkeit** der reellen Zahlen. Wenn man Axiome angibt, die die reellen Zahlen erfüllen sollen, sollte man sich nämlich fragen, ob es überhaupt ein mathematisches Objekt gibt, dass diese Axiome erfüllt (Existenz) und ob es davon tatsächlich nur eines gibt (Eindeutigkeit). Solche Fragen werden beispielsweise im Buch [Dei08] ausführlich besprochen, das eine recht tiefgehende Einführung in die Theorie der reellen Zahlen gibt.

(b) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt:* $x \leq y \;\Leftrightarrow\; -x \geq -y$.

(c) *Für alle* $a, x, y \in \mathbb{R}$ *gilt: Falls* $a \geq 0$ *und* $x \leq y$ *ist, dann ist* $ax \leq ay$.

(d) *Für alle* $a, x, y \in \mathbb{R}$ *gilt: Falls* $a \leq 0$ *und* $x \leq y$ *ist, dann ist* $ax \geq ay$.

(e) *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *mit* $x, y > 0$ *gilt:* $x \leq y \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$.

(f) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $x^2 \geq 0$.

(g) *Es gilt* $-1 < 0 < 1$.

Beweis. (a) Lassen Sie uns Zahlen $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ betrachten. Nehmen wir an, dass $a \leq b$ and $x \leq y$ ist. Aus Axiom 1.2.2(I) folgt

$$a + x \leq a + y \leq b + y,$$

wobei wir das Axiom zwei mal angewendet haben – einmal um die erste Ungleichung zu erhalten und dann nochmals um die zweite Ungleichung zu erhalten.

(b) Lassen Sie uns zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ betrachten. Wir möchten die Äquivalenz $x \leq y \;\Leftrightarrow\; -x \geq -y$ beweisen; diese Äquivalenz besteht aus einer Implikation von links nach rechts und einer von rechts nach links. Wir beweisen zuerst die eine Implikation und dann die andere:

"$\Rightarrow$" Nehmen wir $x \leq y$ an. Wir müssen $-x \geq -y$ beweisen.

Aus Axiom 1.2.2(I) folgt dann $x + (-x) \leq y + (-x)$, also $0 \leq y - x$. Wir wenden Axiom 1.2.2(I) nochmals an und erhalten $0 + (-y) \leq y - x + (-y)$ und somit $-y \leq -x$, also $-x \geq -y$.

"$\Leftarrow$" Nehmen wir nun $-x \geq -y$ an. Wir müssen $x \leq y$ beweisen.

Die Annahme $-x \geq -y$ kann man anders schreiben als $-y \leq -x$. Weil wir die Implikation von links nach recht bereits für alle reellen Zahlen bewiesen haben, können wir sie auch für die Zahl $-y$ anstelle von x und die Zahl $-x$ anstelle von y anwenden. Dann erhalten wir aus der bereits bewiesenen Implikation $-(-y) \geq -(-x)$, also $y \geq x$, was dasselbe bedeutet wir $x \leq y$.

(c) Betrachten wir Zahlen $a, x, y \in \mathbb{R}$ und nehmen wir an, dass $a \geq 0$ und $x \leq y$ gilt. Laut Axiom 1.2.2(I) können wir zur Ungleichung $x \leq y$ die Zahl $-x$ addieren und erhalten somit $0 \leq y - x$. Somit liefert Axiom1.2.2(II), dass

$$0 \leq a(y - x) = ay - ax$$

gilt. Jetzt wenden wir nochmals Axiom 1.2.2(I) an, welches uns erlaubt die Zahl ax zur Ungleichung $0 \leq ay - ax$ zu addieren; dies liefert $ax \leq by$.

(d) Betrachten wir Zahlen $a, x, y \in \mathbb{R}$ und nehmen wir an, dass $a \leq 0$ und $x \leq y$ gilt. Laut der bereits bewiesenen Aussage (b) gilt $-a \geq -0 = 0$ und erhalten wir

$$-ax = (-a)x \leq (-a)y = -ay,$$

wobei die Ungleichung in der Mitte aus der bereits bewiesenen Aussage (c) folgt. Jetzt verwenden wir nochmals die bereits bewiesene Aussage (b) und erhalten somit $ax \geq ay$.

(e) Dies kann man aus Aussage (c) herleiten so ähnlich, wie wir (b) aus (a) hergeleitet haben.

(f) Betrachten wir eine Zahl $x \in \mathbb{R}$. Falls $x \geq 0$ ist, dann folgt aus Axiom 1.2.2(II), dass $x^2 = x \cdot x \geq 0$ gilt. Wenn hingegen $x < 0$ ist, dann ist insbesondere $x \leq 0$ und somit folgt laut (b) die Ungleichung $-x \geq -0 = 0$. Deshalb folgt aus Axiom 1.2.2(II), dass $x^2 = (-x) \cdot (-x) \geq 0$ ist.

(g) Es gilt $1 = 1^2 \geq 0$, wobei die Ungleichung aus (f) folgt. Wegen $1 \neq 0$ folgt $1 > 0$.

Aus (b) erhalten wir somit $-1 \leq -0 = 0$. Weil $-1 \neq 0$ ist, folgt daraus $-1 < 0$. □

Proposition 1.2.4 (Konsequenzen für die Ordnung und die algebraischen Operationen auf $\mathbb{R}$, Teil 2)**.** *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $a, b, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $a \leq b$ and $x < y$ ist, dann ist $a + x < b + y$.*

(b) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $x < y \Leftrightarrow -x > -y$.*

(c) *Für alle $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $a > 0$ und $x < y$ ist, dann ist $ax < ay$.*

(d) *Für alle $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt: Falls $a < 0$ und $x < y$ ist, dann ist $ax > ay$.*

(e) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x, y > 0$ gilt: $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.*

(f) *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt $x^2 > 0$.*

(g) *Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt: $x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 0$.*

Beweis. Diese Aussagen kann man ähnlich wie die Aussagen in Proposition 1.2.3 beweisen. Alternativ kann man viele Aussagen der aktuellen Proposition auch direkt aus den Aussagen von Proposition 1.2.3 herleiten. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Details. □

Definition 1.2.5 (Intervalle)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Mengen

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ a \leq x \leq b\}, & [a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ a \leq x < b\}, \\ (a,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ a < x \leq b\}, & (a,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ a < x < b\}, \\ [a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ a \leq x\}, & (a,\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ a < x\}, \\ (-\infty,b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ x \leq b\}, & (-\infty,b) &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \ x < b\}, \\ (-\infty,\infty) &:= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

bezeichnet man als **Intervalle**.

Definition 1.2.6 (Obere und untere Schranken, kleinste und größte Elemente)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als eine **obere Schranke von M**, falls $x \leq s$ für alle $x \in M$ gilt. Die Menge M heißt **nach oben beschränkt**, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, die eine obere Schranke von M ist.

Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ bezeichnet man als eine **untere Schranke von M**, falls $s \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. Die Menge M heißt **nach unten beschränkt**, falls es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, die eine untere Schranke von M ist.

Die Menge M heißt **beschränkt**, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

(b) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *größtes Element* oder **Maximum** von M, falls s eine obere Schranke von M ist und $s \in M$ gilt.

Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ heißt *kleinstes Element* oder **Minimum** von M, falls s eine untere Schranke von M ist und $s \in M$ gilt.

Proposition 1.2.7 (Eindeutigkeit von kleinsten und größten Elementen)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Dann besitzt M höchstens ein Maximum und höchstens ein Minimum.*

Beweis. Seien $s, t \in \mathbb{R}$ beide ein Maximum von M. Dann gilt $s, t \in M$ und für alle $x \in M$ gilt $x \leq s$ und $x \leq t$. Insbesondere ist also $t \leq s$ und $s \leq t$ und somit $s = t$. □

Aufgrund der vorangehenden Proposition kann man von *dem* Maximum beziehungsweise *dem* Minimum einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ sprechen, sofern dieses Maximum oder Minimum jeweils existiert. Wir verwenden die folgende Notation:

(a) Falls M ein Maximum besitzt, bezeichnen wir es mit $\max M$.

(b) Falls M ein Minimum besitzt, bezeichnen wir es mit $\min M$.

Beispiel 1.2.8 (Einige obere und untere Schranken)**.**

(a) Die Zahlen -1, 0 und 1 sind untere Schranken von $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Die Zahl 1 ist das kleinste Elemente von $\mathbb{N}$, das heißt, es gilt $1 = \min \mathbb{N}$.

(b) Die Menge $\mathbb{N}$ besitzt kein größtes Element. Wenn nämlich $n \in \mathbb{N}$ ist, dann ist $n + 1$ ebenfalls ein Element von $\mathbb{N}$ und es ist strikt größer als n.

Vorlesung 4 (Mi, 23.10.) beginnt ab Beispiel 1.2.8(c)

(c) Jede endliche, nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Axiom 1.2.9 (Archimedisches Axiom)**.** Die Menge $\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt.

Proposition 1.2.10 (Dichtheitseigenschaften der Ordnung von $\mathbb{R}$)**.**

(a) *Für jedes $x > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < x$.*

(b) *Seien* $a, c \in \mathbb{R}$ *mit* $a < c$. *Dann gibt es ein* $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b < c$.

Beweis. (a) Es ist $\frac{1}{x} > 0$. Wegen des Archimedischen Axioms 1.2.9 ist $\frac{1}{x}$ keine obere Schranke von $\mathbb{N}$, das heißt, es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{1}{x}$. Insbesondere ist somit $n \neq 0$. Es folgt $\frac{1}{n} < x$, wie behauptet.

(b) Setze $b := \frac{a+c}{2}$.

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} < \underbrace{\frac{a}{2} + \frac{c}{2}}_{=b} < \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c.$$

Also ist die Behauptung gezeigt. □

Definition 1.2.11 (Suprema und Infima)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ nennt man **kleinste obere Schranke von M** oder **Supremum von M**, falls s das kleinste Element der Menge aller oberen Schranken von M ist.

Wegen Proposition 1.2.7 besitzt M höchstens ein Supremum und falls M ein Supremum besitzt, notiert man dieses Supremum häufig als $\sup M$.

(b) Eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ nennt man **größte untere Schranke von M** oder **Infimum von M**, falls s das größte Element der Menge aller unteren Schranken von M ist.

Wegen Proposition 1.2.7 besitzt M höchstens ein Infimum und falls M ein Infimum besitzt, notiert man dieses Infimum häufig als $\inf M$.

Proposition 1.2.12 (Jedes Maximum ist ein Supremum und jedes Minimum ist ein Infimum)**.** *Sei* $M \subseteq \mathbb{R}$.

(a) *Falls* M *ein Maximum besitzt, dann ist* $\max M$ *auch Supremum von* M.

(b) *Falls* M *ein Minimum besitzt, dann ist* $\min M$ *auch Infimum von* M.

Beweis. (a) Nehem wir an, dass M ein Maximum besitzt. Laut Definition 1.2.6(b) ist $\max M$ eine obere Schranke von M und ein Element von M. Wenn $s \in \mathbb{R}$ eine weitere obere Schranke von M ist, dann gilt wegen $\max M \in M$ auch $\max M \leq s$. Also ist $\max M$ die kleinste obere Schranke von M.

(b) Diesen Beweis kann man analog zum Beweis von (a) führen. □

Beispiele 1.2.13 (Suprema und Infima einiger Mengen)**.** (a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Das Intervall $[a, \infty)$ besitzt das Minimum a und somit auch das Infimum a. Das Intervall (a, ∞) besitzt das Infimum a, aber kein Minimum.

Beweis. Aus der Definition des Intervalls $[a, \infty)$ folgt, dass a eine untere Schranke von $[a, \infty)$ und dass a ein Element von $[a, \infty)$ ist. Also ist a laut Definition 1.2.6(b) das Minimum von $[a, \infty)$. Laut Proposition 1.2.12(a) ist a somit auch das Infimum von $[a, \infty)$.

Nun betrachten wir das Intervall (a, ∞). Laut Definition dieses Intervalls ist a eine untere Schranke von (a, ∞).

Sei nun $s \in \mathbb{R}$ eine weitere untere Schranke von (a, ∞). Wir müssen $s \leq a$ zeigen und gehen hierzu per Widerspruch vor: Wäre $s > a$, dann gäbe es laut Proposition 1.2.10(b) ein $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $a < c < s$, also wäre $c \in (a, \infty)$ aber $c < s$; dies widerspricht der Annahme, dass s eine untere Schranke von (a, ∞) ist. Also ist tatsächlich $s \leq a$, das heißt, a ist die größte untere Schranke von (a, ∞).

Jetzt zeigen wir noch, dass (a, ∞) kein Minimum hat. Hätte das Intervall ein Minimum, so müsste dieses Minimum laut Proposition 1.2.12(b) auch das Infimum des Intervalls – also gleich a – sein. Die Zahl a ist aber nicht das Minimum von (a, ∞), da $a \notin (a, \infty)$ gilt. Also haben wir gezeigt, dass (a, ∞) kein Minimum besitzt. □

(b) Sei $b \in \mathbb{R}$. Das Intervall $(-\infty, b]$ besitzt das Maximum b und somit auch das Supremum b. Das Intervall $(-\infty, b)$ besitzt das Supremum b, aber kein Maximum.

Beweis. Das kann man analog zu (a) beweisen. □

(c) Die Menge $M := \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ besitzt das Maximum 1 and das Infimum 0.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $1 = \max M$ gilt. Betrachten wir ein $x \in M$. Dann gibt es laut Definition von M ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $x = \frac{1}{n}$. Wegen $n \geq 1$ gilt $x = \frac{1}{n} \leq 1$. Also ist 1 eine obere Schranke von M. Außerdem gilt $1 = \frac{1}{1} \in M$; somit ist 1 laut Definition 1.2.6(b) das Maximum von M.

Nun zeigen wir, dass 0 das Infimum von M ist. Dazu beweisen wir zuerst, dass 0 eine untere Schranke von M ist: Betrachten wir ein $x \in M$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x = \frac{1}{n}$. Wegen $n > 0$ gilt auch $x = \frac{1}{n} > 0$. Also ist 0 tatsächlich eine untere Schranke von M.

Wir müssen noch zeigen, dass 0 die größte untere Schrank von M ist. Sei dazu $s \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von M; um $s \leq 0$ zu beweisen, nehmen wir widerspruchshalber an, dass $s > 0$ gilt. Laut Proposition 1.2.10(a) gibt es dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{n} < s$. Wegen $\frac{1}{n} \in M$ widerspricht dies aber der Tatsache, dass s eine untere Schranke von M ist. Also gilt tatsächlich $s \leq 0$. □

Axiom 1.2.14 (Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$)**.** Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1.2.15 (Quadratwurzeln)**.** Mit den bisher besprochenen Eigenschaften der reellen Zahlen – insbesondere mit Hilfe der soeben eingeführten Ordnungsvollständigkeit – kann man bereits zeigen, dass jede reelle Zahl $y \geq 0$ eine Quadratwurzel besitzt. Falls Sie bereits jetzt wissen möchten, wie das geht, können Sie es im Addendum in Abschnitt 1.4 dieses Manuskripts nachlesen.

Wir kommen aber auch später im Laufe der Vorlesung noch einmal auf die Existenz von Wurzeln zurück, nämlich in Abschnitt 2.3.[6]

Vorlesung 5 (Fr, 25.10.) beginnt ab Proposition 1.2.16

In der folgenden Proposition und für den Rest der Vorlesung verwenden wir die folgende Notation: Für jedes $M \subseteq \mathbb{R}$ setzen wir

$$-M := \{-x \mid x \in M\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Proposition 1.2.16 (Suprema vs. Infima)**.** (a) *Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Supremum besitzt, dann besitzt $-M$ das Infimum* $\inf(-M) = -\sup M$.

(b) *Falls $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Infimum besitzt, dann besitzt $-M$ das Supremum* $\sup(-M) = -\inf M$.

(c) *Jede nichtleere und nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Infimum.*

Beweis. Den Beweis führen wir in den Übungen. □

Bemerkung 1.2.17 ($-\infty$ und ∞ als Infima und Suprema)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$. Wenn M nicht nach oben beschränkt ist, dann definiert man $\sup M := \infty$. Wenn M nicht nach unten beschränkt ist, dann definiert man $\inf M := -\infty$.

Mit diesen Definitionen besitzt jetzt nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum – in manchen Fällen können diese aber ∞ oder $-\infty$ sein.[7]

Definition 1.2.18 (Betrag und Vorzeichen)**.** Für jedes $x \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Man nennt $|x|$ den **Betrag** oder den **Absolutbetrag** von x und $\operatorname{sgn}(x)$ das **Vorzeichen** oder das **Signum** von x.

Beachten Sie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $|x| \in [0, \infty)$ und es ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist. Außerdem gilt $|x| = x \cdot \operatorname{sgn}(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.2.19 (Eigenschaften des Betrags)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

[6] Der Grund, warum wir das erst später besprechen, ist, dass der Beweis viel übersichtlicher wird, wenn man bereits weiß, was eine stetige Funktion ist und schon einige Eigenschaften stetiger Funktionen bewiesen hat. Sie werden aber sehen, dass auch der Beweis, den wir später führen, das Ordnungsvollständigkeitsaxiom 1.2.14 verwendet.

[7] Wenn Sie möchten, können Sie sich darüber Gedanken machen, warum es auch sinnvoll ist, zusätzlich noch $\sup \emptyset := -\infty$ und $\inf \emptyset := \infty$ zu definieren. Wenn man auch diese Definition verwendet, besitzt also wirklich jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum und ein Infimum.

(a) *Es ist* $|x| = \max\{x, -x\}$.

(b) *Es gilt* $|x| \geq x$ *und* $|x| \geq -x$.

(c) ***Dreiecksungleichung:*** *Es ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(d) ***Untere Dreiecksungleichung:*** *Es ist* $|x - y| \geq \big| |x| - |y| \big| \geq |x| - |y|$.

Beweis. (a) Betrachten wir ein beliebiges, aber festes $x \in \mathbb{R}$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- *Erster Fall:* Falls $x \geq 0$ ist, ist $x \geq 0 \geq -x$. Somit gilt $\max\{x, -x\} = x = |x|$.
- *Zweiter Fall:* Falls $x \leq 0$ ist, gilt $-x \geq 0 \geq x$. Somit folgt $\max\{x, -x\} = -x = |x|$.

(b) Wegen (a) gilt $|x| = \max\{x, -x\} \geq x$ und $|x| = \max\{x, -x\} \geq -x$.

(c) Indem wir Aussage (b) auf jede der beiden Zahlen x und y anwenden, erhalten wir

$$|x| + |y| \geq x + y \qquad \text{und} \qquad |x| + |y| \geq (-x) + (-y) = -(x + y).$$

Also ist $|x| + |y|$ eine obere Schranke der Menge $\{x + y, -(x + y)\}$ und somit folgt

$$|x| + |y| \geq \max\{x + y, -(x + y)\} = |x + y|\,,$$

wobei wir für die Gleichheit am Ende die Aussage (a) auf die Zahl $x + y$ angewendet haben.

(d) Weil die zweite Ungleichung aus (b) folgt, genügt es die Ungleichung $|x - y| \geq \big| |x| - |y| \big|$ zu zeigen. Zu diesem Zweck beobachten wir zuerst, dass

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|\,,$$

gilt, wobei die Ungleichung in dieser Rechnung aus (c) folgt. Also ist $|x| - |y| \leq |x - y|$. Ebenso gilt

$$|y| = |(y - x) + x| \leq |y - x| + |x|\,,$$

wobei die Ungleichung erneut aus (c) folgt. Aus (a) folgt, dass der Betrag jeder reellen Zahl gleich dem Betrag von minus der Zahl ist, also gilt $|y - x| = |x - y|$ und somit folgt $|y| - |x| \leq |x - y|$.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $|x - y|$ größer oder gleich den beiden Zahlen $|x| - |y|$ und $-(|x| - |y|)$ ist, das heißt, es gilt

$$|x - y| \geq \max\big\{ |x| - |y|\,, -(|x| - |y|) \big\} = \big| |x| - |y| \big|,$$

wobei die Gleichheit am Ende der Rechnung laut (a) gilt. $\square$

Proposition 1.2.20 (Beschränktheit mit Hilfe des Betrags)**.** *Eine Menge* $M \subseteq \mathbb{R}$ *ist genau dann beschränkt, wenn es eine Zahl* $c \in [0, \infty)$ *gibt, die die Eigenschaft* $|x| \leq c$ *für alle* $x \in M$ *erfüllt.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Nehmen wir an, dass M beschränkt ist. Laut Definition 1.2.6(a) bedeutet das, dass M nach oben und nach unten beschränkt ist. Ebenfalls laut Definition 1.2.6(a) bedeutet das wiederum, dass es Zahlen $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $s_1 \leq x \leq s_2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir setzen nun $c := \max\{-s_1, s_2, 0\}$. Dann ist $c \geq 0$. Für jedes $x \in M$ gilt

$$x \leq s_2 \leq c \qquad \text{und} \qquad -x \leq -s_1 \leq c,$$

das heißt, c ist eine obere Schranke von $\{x, -x\}$ und somit gilt $c \geq \max\{x, -x\} = |x|$, wobei die letzte Gleichheit laut Proposition 1.2.19(b) gilt.[8]

"$\Leftarrow$" Nehmen wir an, dass es ein $c \in [0, \infty)$ gibt derart, dass $|x| \leq c$ für all $x \in M$ gilt. Für alle $x \in M$ folgt dann

$$x \leq |x| \leq c \qquad \text{und} \qquad x \geq -|x| \geq -c,$$

wobei wir sowohl als auch rechts Proposition 1.2.19(b) verwendet haben. Also ist M nach unten beschränkt und nach oben beschränkt und somit beschränkt. ☐

1.3 Komplexe Zahlen

Die komplexen Zahlen sind eine Menge von Zahlen, die die reellen Zahlen enthält und den Vorteil hat, dass es in ihr eine Zahl gibt, deren Quadrat gleich -1 ist:

Definition 1.3.1 (Komplexe Zahlen)**.** Eine komplexe Zahl ist eine Zahl der Form $z = x + \mathrm{i}y$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ sind. Dabei verwendet man die folgenden Konventionen:

(a) Jede reelle Zahl x fasst man als die komplexe Zahl $x + \mathrm{i}0$ auf.

(b) Man schreibt kurz $\mathrm{i} := 0 + \mathrm{i}1$.

(c) Für eine komplexe Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$) nennt man x den **Realteil** von z und y den **Imaginärteil** von z. Man schreibt $x =: \operatorname{Re} z$ und $y =: \operatorname{Im} z$.

(d) Zwei komplexe Zahlen z_1, z_2 heißen **gleich**, was wir als $z_1 = z_2$ notieren, wenn ihre Reilteile gleich sind und ihre Imaginärzeile gleich sind.

(e) Die Menge aller komplexen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$, das heißt, wir setzen

$$\mathbb{C} := \{x + \mathrm{i}y \mid \; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

[8] Wenn Sie Lust haben, können Sie sich einmal überlegen, ob man c wirklich als $\max\{-s_1, s_2, 0\}$ definieren muss um $c \geq 0$ zu erhalten oder ob das mit der Definition $c := \{-s_1, s_2\}$ nicht genauso gut klappen würde.

(f) Für komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ und $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ definieren wir die Summe und das Produkt als

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &:= (x_1 + x_2) + \mathrm{i}(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 := z_1 \cdot z_2 &:= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Aus der Definition der Multiplikation zweier komplexer Zahlen folgt $\mathrm{i}^2 = -1$ – das heißt, es gibt eine komplexe Zahl deren Quadrat gleich der reellen Zahl -1 ist. Für die Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen gelten die üblichen Rechenregeln, die Sie auch für die reellen Zahlen bereits kennen. Sie können zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ auch subtrahieren, indem Sie $z_1 - z_2 := z_1 + (-1) \cdot z_2$ setzen. Außerdem können Sie für eine Zahlen $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ den Kehrbruch definieren als

$$\frac{1}{z} := \frac{x}{x^2 + y^2} + \mathrm{i}\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Dann können Sie leicht nachrechnen, dass $\frac{1}{z} \cdot z = 1$ gilt.

Die Definition des Produktes zweier komplexer Zahlen wirkt auf den ersten Blick etwas kompliziert. Man kann aber sehr leicht mit dieser Definition umgehen, wenn man einfach das Distributivgesetz für Addition und Multiplikation zusammen mit dem Fakt $\mathrm{i}^2 = -1$ verwendet.

Bemerkung 1.3.2 (Die komplexe Zahlenebene)**.** Die Menge der komplexen Zahlen kann man als Ebene skizzieren, die dann manchmal als **Gaußsche Zahlenebene** bezeichnet wird. Dabei trägt man den Realteil einer komplexen Zahl nach rechts an und den Imaginärteil nach oben. Wir veranschaulichen das in der Vorlesung mit einer Zeichnung.

Definition 1.3.3 (Konjugiert komplexe Zahlen und Betrag)**.** Sei $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Die Zahl $\overline{z} := x - \mathrm{i}y = \operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z \in \mathbb{C}$ heißt die **zu z konjugiert komplexe Zahl** oder kürzer das **konjugiert Komplexe von z**.

(b) Die reelle Zahl $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \in [0, \infty)$ heißt der **Betrag** oder der **Absolutbetrag**[9] von z.

Bemerkung 1.3.4 (Konsistenz zwischen reellem und komplexem Betrag)**.** Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $x \in \mathbb{C}$, also haben wir nun zwei verschiedene Definitionen des Betrags von x – nämlich Definition 1.2.18 und Definition 1.3.3(b) – und müssen sicherstellen, dass diese Definitionen sich nicht widersprechen.

Das kann man glücklicherweise leicht überprüfen: Definition 1.3.3(b) liefert nämlich für $|x|$ die Formel

$$|x| = |x + \mathrm{i}0| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0, \\ -x & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

[9] Auf Englisch sagt man dazu **absolute value** oder **modulus**.

und der Ausdruck am Ende der Gleichung entspricht genau der Definition des Betrags von x laut Definition 1.2.18.

Für reelle Zahlen ist es also egal, welche der beiden Betragsdefinitionen man verwendet, denn beide liefern dieselbe Zahl als Betrag.

Die folgenden Proposition und ihren Beweis besprechen wir in den Übungen.

Proposition 1.3.5 (Eigenschaft des Betrags und von konjugiert komplexen Zahlen)**.** *Seien* $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(a) *Es gilt* $z \in \mathbb{R}$ *genau dann, wenn* $z = \overline{z}$ *ist.*

(b) *Es gilt* $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(c) *Es gilt* $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

(d) *Es gilt* $z = 0$ *genau dann, wenn* $\overline{z} = 0$ *gilt. Falls* $z \neq 0$ *ist, gilt* $\overline{1/z} = 1/\overline{z}$.

(e) *Es gilt* $|z|^2 = z\overline{z}$ *und* $|z| = |\overline{z}|$.

(f) *Es gilt* $z = 0$ *genau dann, wenn* $|z| = 0$ *ist. Falls* $z \neq 0$ *ist, gilt* $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

(g) *Es gilt* $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

(h) *Es gilt die* ***Dreiecksungleichung*** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

(i) *Es gilt die* ***untere Dreiecksungleichung*** $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big| \geq |z_1| - |z_2|$.

(j) *Falls* $z \neq 0$ *ist, gilt* $|1/z| = 1/|z|$.

Vorlesung 6 (Mi, 30.10.) beginnt ab Beispiel 1.3.6

Wegen des Satzes von Pythagoras, den Sie aus der Schule kennen, kann man für zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ die Zahl $|z_1 - z_2|$ als den Abstand von z_1 und z_2 in der komplexen Ebene auffassen. Das werden wir in der Analysis 1 immer wieder verwenden. Als ein erstes Anwendungsbeispiel dieser Beobachtung besprechen wir nun, wie man Kreise in der komplexen Ebene mit Hilfe des Betrags beschreiben kann:

Beispiel 1.3.6 (Kreise in der komplexen Ebene)**.** Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in [0, \infty)$. Dann beschreiben die drei Mengen

$$\begin{aligned} B_{\leq r}(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - z_0| \leq r\}, \\ B_{<r}(z_0) &:= \{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - z_0| < r\}, \\ &\{z \in \mathbb{C} \mid \ |z - z_0| = r\} \end{aligned}$$

die **abgeschlossene Kreisscheibe** und die **offene Kreissscheibe** um z_0 mit Radius r sowie die **Kreislinie**[10] um z_0 mit Radius r.

Diese drei Mengen werden in Abbildung 1.3.1 graphisch dargestellt.

[10]Für die Kreislinie verwenden wir übrigens nicht die Notation $B_{=r}(z_0)$. Der Hintergrund dieser Notationen wird in der Analysis 2 klar werden, wenn wir über metrische Räume sprechen.

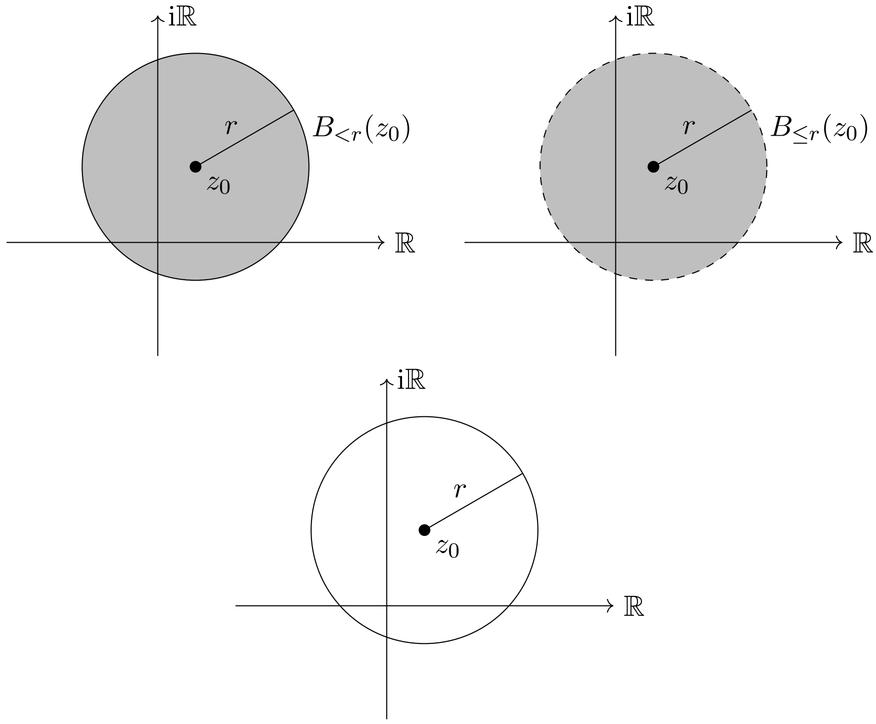

Abbildung 1.3.1: Skizzen der drei Mengen aus Beispiel 1.3.6: Die offene Kreisscheibe $B_{<r}(z_0)$, die abgeschlossene Kreisscheibe $B_{\leq r}(z_0)$ und die Kreislinie mit Mittelpunkt z_0 und Radius r.

Definition 1.3.7 (Beschränktheit in $\mathbb{C}$)**.** Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls es eine Zahl $c \in [0, \infty)$ gibt derart, dass $|z| \leq c$ für alle $z \in M$ gilt.

Beachten Sie, dass die Definition der Beschränktheit in $\mathbb{C}$ konsistent mit der Definition der Beschränktheit in $\mathbb{R}$ ist. Genauer: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ genau dann beschränkt im Sinne der vorangehenden Definition ist, wenn sie beschränkt im Sinne der Definition 1.2.6(a) ist; das liegt an der Charakterisierung der Beschränktheit von Teilmengen von $\mathbb{R}$, die wir in Proposition 1.2.20 bewiesen haben und an der Konsistenz des reellen und des komplexen Betrags (Bemerkung 1.3.4).

Proposition 1.3.8 (Beschränktheit und Kreise)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Menge M ist beschränkt.*

(ii) *Es gibt ein $r \in [0, \infty)$ derart, dass $M \subseteq B_{\leq r}(0)$ gilt.*

(iii) *Es gibt ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $r \in [0, \infty)$ derart, dass $M \subseteq B_{\leq r}(z_0)$ gilt.*

Beweis. "(i) ⇒ (ii)" Nehmen wir an, dass M beschränkt ist. Laut Definition 1.3.7 können wir dann eine Zahl $c \in [0, \infty)$ mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in M$ die Eigenschaft $|z| \le c$ gilt.

Wir setzen $r := c$ und beweisen nun $M \subseteq B_{\le r}(0)$ zeigen. Dazu betrachten wir ein beliebiges, aber festes $z \in M$. Es gilt $|z| \le c = r$ und somit $z \in B_{\le r}(0)$.

"(ii) ⇒ (iii)" Nehmen wir an, dass es ein $r \in [0, \infty)$ derart, dass $M \subseteq B_{\le r}(0)$ gilt. Wähle $z_0 := 0$. Dann ist $M \subseteq B_{\le r}(z_0)$.

"(iii) ⇒ (i)" Nehmen wir an, dass es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $r \in [0, \infty)$ gibt derart, dass $M \subseteq B_{\le r}(z_0)$ gilt. Definieren $c := r + |z_0| \in [0, \infty)$. Für jedes $z \in M$ gilt dann

$$|z| = |z - z_0 + z_0| \le |z - z_0| + |z_0| \le r + |z_0| = c,$$

wobei wir für die erste Ungleichung die Dreieckecksungleichung für komplexe Zahlen (Proposition 1.3.5(h)) verwendet haben. Also ist M beschränkt. □

1.4 Addendum: Existenz und Eindeutigkeit von Quadratwurzeln

Addenda enthalten zusätzliche Informationen, die Sie bei Interesse lesen können, die aber nicht zum Vorlesungsstoff der Analysis 1 im Wintersemester 2024/25 gehören.

In diesem Addendum können Sie bei Interesse nachlesen, wie man aus den Eigenschaften der reellen Zahlen, die wir bis einschließlich Axiom 1.2.14 besprochen haben, herleiten kann, dass jede Zahl in $[0, \infty)$ eine Quadratwurzel besitzt. Das hatten wir in Bemerkung 1.2.15 angemerkt und es ist Teil der Aussage des folgendes Theorems. Der Beweis wirkt an dieser Stelle aber vermutlich etwas technisch. In Abschnitt 2.3 werden wir einen weiteren Beweis angeben, der zwar auf derselben Grundidee beruht, sich aber aufgrund der zusätzlichen Theorie, die wir bis dahin zur Verfügung haben, deutlich einfacher und klarer formulieren lässt.

Theorem 1.4.1 (Existenz und Eindeutigkeit von Wurzeln)**.** *Sei $y \in [0, \infty)$. Dann gibt es genau eine Zahl $w \in [0, \infty)$ mit der Eigenschaft $w^2 = y$.*

*Man bezeichnet dieses Zahl w als die **Wurzel** oder, genauer, die **Quadratwurzel** von y und schreibt $w =: \sqrt{y}$.*

Zum Beweis benötigen wir das folgende Hilfsresultat.

Lemma 1.4.2 (Etwas Freiraum um ein Quadrat)**.** *Seien $w, y \in [0, \infty)$.*

(a) *Wenn $w^2 < y$ ist, dann gibt es ein $x \in (w, \infty)$ mit $x^2 < y$.*

(b) *Wenn $w^2 > y$ ist, dann gibt es ein $v \in (0, w)$ mit $y < v^2$.*

Beweis. (a) Wenn $w = 0$ ist, können wir zum Beispiel $x = \frac{y}{2}$ wählen; also sei nun $w > 0$. Wir wählen eine reelle Zahl $\delta > 0$, die kleiner als w und kleiner als $\frac{y-w^2}{4w}$ ist und setzen $x := w + \delta > w$. Dann gilt

$$x^2 = (w + \delta)^2 = w^2 + 2w\delta + \delta^2 < w^2 + 4w\delta < w^2 + (y - w^2) = y.$$

(b) Wegen $w^2 > y \geq 0$ ist $w \neq 0$ und somit $w > 0$. Wähle eine reelle Zahl $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{w^2-y}{2w} \leq \frac{w}{2} < w$ und setze $v := w - \delta \in (0, w)$. Dann ist

$$v^2 = (w-\delta)^2 = w^2 - 2w\delta + \delta^2 \geq w^2 - 2w\delta > w^2 - (w^2 - y) = y,$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Beweis von Theorem 1.4.1. Wir zeigen zuerst die Existenz und dann die Eindeutigkeit.

Existenz:

Sei $M := \{x \in [0, \infty) \mid x^2 \leq y\}$. Die Menge M ist nicht leer, denn es gilt $0 \in M$.

Als nächstes zeigen wir, dass M nach oben beschränkt ist. Setze dazu $s := \max\{y, 1\}$; wir zeigen, dass s eine obere Schranke von M ist. Für jedes $x \in M$ unterscheiden wir dazu zwei Fälle:

- *Erster Fall:* $x < 1$. In diesem Fall gilt $x < 1 \leq s$.
- *Zweiter Fall:* $x \geq 1$. In diesem Fall gilt $x = x \cdot 1 \leq x^2 \leq y \leq s$.

In jedem Fall ist also $x \leq s$ und somit ist M tatsächlich nach oben beschränkt.

Wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (Axiom 1.2.14) besitzt M also ein Supremum. Wir setzen $w := \sup M$ und zeigen nun, dass $w^2 = y$ gilt. Dazu müssen wir nur beweisen, dass weder $w^2 < y$ noch $w^2 > y$ gelten kann.

Nehmen wir zunächst widerspruchshalber an, dass $w^2 < y$ ist. Laut Lemma 1.4.2(a) gibt es dann eine reelle Zahl $x > w$ mit der Eigenschaft $x^2 < y$. Damit liegt x in M, aber $x > w$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass w eine obere Schranke von M ist.

Nun nehmen wir widerspruchshalber an, dass $w^2 > y$ ist. Laut Lemma 1.4.2(b) gibt es dann eine Zahl $v \in (0, w)$ mit $y < v^2 < w^2$. Wir beobachten, dass v eine obere Schranke von M ist. Für $x \in M$ muss nämlich $x \leq v$ gelten, denn aus $v < x$ würde $v^2 < x^2 \leq y < v^2$ folgen, was nicht sein kann. Dass aber v eine obere Schranke von M ist und zugleich $v < w$ gilt, widerspricht der Definition von w, denn wir hatten w als die kleinste obere Schranke von M definiert.

Also ist tatsächlich $w^2 = y$ gezeigt und die Existenz einer Quadratwurzeln von y ist somit bewiesen. Wegen $0 \in M$ folgt zudem $0 \leq w$, also liegt die Quadratwurzel w tatsächlich in $[0, \infty)$.

Eindeutigkeit:

Seien $u, w \in [0, \infty)$ mit $u^2 = y = v^2$. Angenommen, es wäre $u \neq w$. Dann ist eine von beiden Zahlen – sagen wir, ohne Einschränkung, w – größer als die andere, das heißt, es gilt $0 \leq u < w$. Daraus folgt aber $u^2 < w^2$, was ein Widerspruch zu $u^2 = w^2$ ist. □

1.5 Addendum: Weitere interessante Eigenschaften der Anordnung von $\mathbb{R}$

Lassen Sie uns eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ als **ordnungskonvex** bezeichnen, falls folgendes gilt:

$$\forall x, z \in M \; \forall y \in M : \quad (x < y < z \;\Rightarrow\; y \in M)$$

Eine interessante Konsequenz der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ ist es, die ordnungskonvexen Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind:

Theorem 1.5.1 (Ordnungskonvexe Mengen sind Intervalle)**.** *Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann ein Intervall, wenn sie ordnungskonvex ist.*

Wir skizzieren den Beweis nur; die Details sind nicht schwierig, aber enthalten einige Fallunterscheidungen, die wir hier nicht alle aufzählen.

Beweisskizze von Theorem 1.5.1. "$\Rightarrow$" Diese Implikation folgt leicht aus der Definition von Intervallen (Definition 1.2.5); man muss nur alle neun verschiendenen Fälle durchgehen.

"$\Leftarrow$" Sei M ordnungskonvex. Wenn M leer ist, gilt zum Beispiel $M = (1, 1)$ und wenn M nur ein Element x besitzt, dann ist $M = [x, x]$. Also besitze M nun für den Rest des Beweises mehr als ein Element. Dann können wir $a := \inf M$ und $b := \sup M$ definieren und es ist $-\infty \leq a < b \leq \infty$.

Für jedes $y \in (a, b)$ gilt es ein $x \in M$ mit $x < y$ und ein $z \in M$ mit $y < z$. Nach Voraussetzung gilt somit $x \in M$. Somit ist

$$(a, b) \subseteq M.$$

Man muss nun für a unterscheiden, ob $a = -\infty$ oder $a \in \mathbb{R}$ gilt. Im zweitgenannten Fall muss man weiter unterscheiden, ob a ein Element von M ist oder nicht. Ebenso muss man für b unterscheiden, ob $b = \infty$ oder $b \in \mathbb{R}$ gilt, und im zweitgenannten Fall muss man weiter unterscheiden, ob b ein Element von M ist oder nicht. So erhält man insgesamt neun Fälle und in jedem dieser Fälle ist M eines der neun Intervalle aus Definition 1.2.5. $\square$

Wenn Sie Lust haben, können Sie sich überlegen, warum die Implikation "$\Leftarrow$" in obigem Satz nicht mehr stimmt, wenn man anstelle von $\mathbb{R}$ mit einer Zahlenmenge arbeitet, die nicht ordnungsvollständig ist (und auch Intervalle nur als Teilmengen dieser Menge definiert).

Kapitel 2

Reelle und komplexe Funktionen

2.1 Stetige Funktionen

Definition 2.1.1 (Funktion)**.** Seien X, Y Mengen.

(a) Eine **Funktion** oder **Abbildung** f von X nach Y ist eine Zuordnung, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element aus Y zuordnet; letzteres Element wird mit $f(x)$ bezeichnet.[1]

(b) Um zu sagen, dass f eine Funktion von X nach Y ist, schreibt man $f\colon X \to Y$ oder $X \xrightarrow{f} Y$.

(c) Sei $f\colon X \to Y$. Dann nennt man X den **Definitionsbereich** von f und Y den **Wertbereich** von f.

Für jedes $x \in X$ bezeichnet man im Ausdruck $f(x)$ das Objekt x als **Argument** und das Objekt $f(x)$ als den **Funktionswert** oder den **Wert** von f an der Stelle x.

Um konkret anzugeben, was eine Funktion f tut, verwendet man den Pfeil $\mapsto$. Die Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet, kann man zum Beispiel schreiben als

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

In der Analysis 1 interessieren wir uns besonders für Funktionen, die von Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ abbilden und für Funktionen, die von Mengen $M \subseteq \mathbb{C}$ nach $\mathbb{C}$ abbilden. Hier sind einige konkrete Beispiele:

Beispiele 2.1.2 (Einige Beispiele für reelle und komplexe Funktionen)**.**

[1] Man kann noch etwas genauer werden, indem man eine Funktion als eine **Relation**, das heißt als eine Teilmenge des sogenannten **kartesischen Produkts** $X \times Y$ definiert, die einige Zusatzeigenschaften erfüllt. Darauf gehen wir an dieser Stelle aber nicht weiter ein.

(a) Die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto z^2 \end{aligned}$$

ordnet jeder komplexen Zahl z ihr Quadrat $z^2 := z \cdot z$ zu. Beispielsweise gilt für diese Funktion $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(\mathrm{i}) = -1$ und $f(1-\mathrm{i}) = (1-\mathrm{i})^2 = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 = -2\mathrm{i}$.

(b) Die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

ordnet jeder von Null verschiedenen komplexen Zahl z ihren Kehrbruch zu. Für diese Funktion gilt zum Beispiel $g(-\mathrm{i}) = -\frac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, $g(2) = \frac{1}{2}$, $g(-2) = -\frac{1}{2}$ und $g(1+\mathrm{i}) = \frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$.

(c) Für die Funktion

$$\begin{aligned} h\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

erfüllt beispielsweise $h(1) = 1$, $h(-2) = -\frac{1}{2}$, $h(0) = 1$ und $h(\frac{1}{3}) = 3$.

Eines der wichtigsten Konzepte der Analysis ist die **Stetigkeit** von Funktionen. Anschaulich besagt dieses Konzept, dass kleine Änderungen an einem Element x des Definitionsbereichs einer Funktion f nur zu kleinen Änderungen des Funktionswerts $f(x)$ führen. Die mathematisch genaue Definition, wann eine Funktion stetig heißt, ist folgendermaßen:

Definition 2.1.3 (Stetigkeit)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ nichtleer und sei $f\colon M \to \mathbb{C}$.

(a) Sei $z_0 \in M$. Die Funktion f heißt **stetig in** z_0, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in M \quad \big(|z - z_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\big)$$

Die Funktion f heißt **unstetig in** z_0, falls sie nicht stetig in z_0 ist.

(b) Die Funktion f heißt **stetig**, falls sie in jedem Punkt $z_0 \in M$ stetig ist. Sie heißt **unstetig**, falls sie nicht stetig ist.

Beispiele 2.1.4 (Einige Beispiele für stetige und unstetige Funktionen)**.** (a) Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 2z$ ist stetig.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f in jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ stetig ist. Betrachten wir also ein beliebiges, aber festes $z_0 \in \mathbb{C}$.

Um die Stetigkeit von f in z_0 zu beweisen, betrachten wir ein beliebiges, aber festes $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist $\delta > 0$.

Betrachten wir nun ein beliebiges, aber festes $z \in M$ und nehmen wir an, dass $|z - z_0| < \delta$ gilt. Dann ist $|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}$ und somit gilt

$$|f(z) - f(z_0)| = |2z - 2z_0| = 2\,|z - z_0| < 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist f stetig in z_0. □

Vorlesung 7 (Mi, 06.11.) beginnt ab Beispiel 2.1.4(b)

(b) Die Funktion

$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

aus Beispiel 2.1.2(c) ist im Punkt 0 nicht stetig.

Beweis. Wir zeigen, dass die Verneinung der Stetigkeit von h im Punkt 0 gilt, das heißt wir zeigen folgende Aussage:

$$\exists \varepsilon > 0\; \forall \delta > 0\; \exists z \in \mathbb{R} : \quad \big(|z - 0| < \delta \;\wedge\; |h(z) - h(0)| \geq \varepsilon\big)$$

Dazu wählen wir $\varepsilon := 1$. Betrachten wir nun ein beliebiges, aber festes $\delta > 0$. Wähle $z := \min\{\frac{1}{2}, \frac{\delta}{2}\} \in (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|z - 0| = z \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Außerdem ist $h(z) = \frac{1}{z} \geq 2$ und somit $h(z) - h(0) \geq 2 - 1 = 1$, also

$$|h(z) - h(0)| = h(z) - h(0) \geq 1 = \varepsilon,$$

womit die Unstetigkeit von h in 0 gezeigt ist. □

(c) Sei $a \in \mathbb{C}$. Die konstante Funktion

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C},$$
$$z \mapsto a$$

ist stetig. Den Beweis kann man sehr leicht mit Hilfe der Definition von Stetigkeit führen (die Details haben wir im Tutorium besprochen).

Proposition 2.1.5 (Stetige Funktionen sind lokal beschränkt)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, sei $z_0 \in M$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig in z_0. Dann gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass die Menge*

$$\{f(z) \mid \; z \in M \text{ und } |z - z_0| < \delta\}$$

beschränkt ist.

Beweis. Wir setzen $\varepsilon := 1 > 0$. Wegen der Stetigkeit von f in z_0 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $z \in M$ mit $|z - z_0| < \delta$ die Ungleichung $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon = 1$ gilt. Für alle $z \in M$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt somit

$$|f(z)| = |f(z) - f(z_0) + f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)| \leq 1 + |f(z_0)| \,.$$

Somit besitzt jedes Element der Menge $\{f(z) \mid \; z \in M \text{ und } |z - z_0| < \delta\}$ höchstens den Betrag $1 + |f(z_0)|$. $\square$

Proposition 2.1.6 (Summen und Produkte stetiger Funktionen)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in M$. Seien $f, g : M \to \mathbb{C}$ stetig in z_0.*

(a) *Die Funktion*

$$f + g : M \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto (f + g)(z) := f(z) + g(z)$$

ist ebenfalls stetig in z_0.

(b) *Die Funktion*

$$fg : M \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto (fg)(z) := f(z)g(z)$$

ist ebenfalls stetig in z_0.

Beweis. (a) Betrachten wir ein beliebiges, aber festes $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f und g gibt es Zahlen $\delta_1 > 0$ und $\delta_2 > 0$ derart, dass für alle $z \in M$ die folgenden Implikationen gelten:

$$\begin{aligned} & |z - z_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \text{und} \qquad & |z - z_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Betrachten wir ein beliebiges, aber festes $z \in M$ und nehmen wir an, dass $|z - z_0| < \delta$ gilt.

Dann gilt sowohl $|z - z_0| < \delta_1$ als auch $|z - z_0| < \delta_2$ und somit folgt $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist

$$\begin{aligned} |(f + g)(z) - (f + g)(z_0)| &= \big|\big(f(z) + g(z)\big) - \big(f(z_0) + g(z_0)\big)\big| \\ &= \big|\big(f(z) - f(z_0)\big) + \big(g(z) - g(z_0)\big)\big| \end{aligned}$$

$$\leq |f(z) - f(z_0)| + |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir für die erste Gleichheit die Definition der Funktion $f+g$ (die in der Aussage der Proposition steht) und für die erste Ungleichung die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen (Proposition 1.3.5(h)) verwendet haben.

(b) Betrachten wir ein beliebiges, aber festes $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f in z_0 gibt es laut Proposition 2.1.5 Zahlen $C > 0$ und $\delta_0 > 0$ derart, dass für alle $z \in M$ die folgende Implikation gilt:

$$|z - z_0| < \delta_0 \quad \Rightarrow \quad |f(z)| \leq C$$

Indem wir C falls nötig noch vergrößern, erreichen wir, dass dieselbe Implikation wahr bleibt und zugleich $|g(z_0)| \leq C$ gilt.

Ebenfalls wegen der Stetigkeit von f und g gibt es Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$ derart, dass für alle $z \in M$ die folgenden Implikationen gelten:

$$\begin{aligned} & |z - z_0| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2C} \\ \text{und} \qquad & |z - z_0| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2C} \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\} > 0$. Lassen Sie uns ein beliebiges, aber festes $z \in M$ betrachten und annehmen, dass $|z - z_0| < \delta$ gilt.

Dann ist einerseits $|z - z_0| < \delta_1$ und $|z - z_0| < \delta_2$ und somit $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2C}$ und $|g(z) - g(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2C}$. Andererseits ist $|z - z_0| < \delta_0$ und somit $f(z) \leq C$. Da aufgrund der Wahl von C auch $|g(z_0)| \leq C$ gilt, erhalten wir insgesamt

$$\begin{aligned} |(fg)(z) - (fg)(z_0)| &= |f(z)g(z) - f(z)g(z_0) + f(z)g(z_0) - f(z_0)g(z_0)| \\ &\leq |f(z)|\,|g(z) - g(z_0)| + |f(z) - f(z_0)|\,|g(z_0)| \\ &\leq C\,|g(z) - g(z_0)| + |f(z) - f(z_0)|\,C < C\frac{\varepsilon}{2C} + \frac{\varepsilon}{2C}C = \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung Proposition 1.3.5(g) und (h) und für die Striktheit der letzten Ungleichung die Eigenschaft $C > 0$ verwendet haben; außerdem haben wir für die erste Gleichheit die Definition der Funktion fg verwendet. □

Beispiel 2.1.7 (Monomfunktionen sind stetig)**.** Durch mehrfache Anwendung von Proposition 2.1.6(b) erhält man: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die sogenannte **Monomfunktion** $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$ stetig.

Definition 2.1.8 (Hintereinanderausführung von Funktionen)**.** Seien X, Y, Z Mengen und seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Funktionen. Die Funktion $g \circ f : X \to Z$, die durch

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

für alle $x \in X$ definiert ist, nennt man die **Hintereinanderausführung** oder die **Komposition** von f und g. Man kann sie auch durch das Diagramm

$$g \circ f : \quad X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

notieren.

Vorlesung 8 (Fr, 08.11.) beginnt ab Proposition 2.1.9

Proposition 2.1.9 (Stetigkeit hintereinanderausgeführter Funktionen). *Sei $L, M \subseteq \mathbb{C}$, seien die Funktionen*

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

gegeben und sei $z_0 \in L$. Wenn f in z_0 stetig ist[2] *und g im Punkt $f(z_0)$ stetig ist, dann ist $g \circ f$ stetig in z_0.*

Den Beweis von Proposition 2.1.9 haben wir in der Vorlesung ausgelassen (mit dem Hinweis, dass er in den Übungen besprochen wird, aber leider hat er es dann doch nicht auf ein Übungsblatt geschafft).

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest. Weil g stetig in $f(z_0)$ ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $y \in M$ mit $|y - f(z_0)| < \delta$ die Ungleichung $|g(y) - g(f(z_0))| < \varepsilon$ gilt.

Da f in z_0 stetig ist, gibt es außerdem ein $\gamma > 0$ derart, dass für alle $z \in L$ mit $|z - z_0| < \gamma$ die Ungleichung $|f(z) - f(z_0)| < \delta$ gilt.

Sei nun $z \in L$ mit $|z - z_0| < \gamma$. Dann ist $f(z)$ ein Element von M mit $|f(z) - f(z_0)| < \delta$ und somit folgt

$$|(g \circ f)(z) - (g \circ f)(z_0)| = |g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon,$$

womit die Stetigkeit von $g \circ f$ in z_0 bewiesen ist. □

Theorem 2.1.10 (Zwischenwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $y \in \mathbb{R}$ und gelte*

$$f(a) \leq y \leq f(b) \qquad \textit{oder} \qquad f(a) \geq y \geq f(b).$$

Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit der Eigenschaft $f(x_0) = y$.

Beweis. Im Theorem stehen zwei verschiedene Fälle. Wir betrachten den ersten der beiden Fälle, das heißt, wir nehmen $f(a) \leq y \leq f(b)$ an. In den Übungen besprechen wir, wie man den zweiten Fall auf den ersten Fall zurückführen kann.

Lassen Sie uns die Menge $M := \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq y\}$ betrachten. Es gilt $a \in M$ und jedes Element von M ist $\leq b$, also ist M nichtleer und nach oben beschränkt. Wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (Axiom 1.2.14) besitzt M also ein Supremum $x_0 := \sup M$ in $\mathbb{R}$. Wegen $a \in M$ ist $x_0 \geq a$ und weil b eine obere Schranke von M ist, ist $x_0 \leq b$; das heißt, es gilt $x_0 \in [a, b]$. Wir zeigen nun, dass $f(x_0) = y$ ist. Dazu genügt es, wenn wir ausschließend, dass $f(x_0) < y$ oder $f(x_0) > y$ sein kann.

[2] Beachten Sie, dass es sinnvoll ist, über Stetigkeit von f zu sprechen, denn wegen $M \subseteq \mathbb{C}$ kann man f auch als eine Abbildung von L nach $\mathbb{C}$ auffassen.

Zunächst nehmen wir widerspruchshalber an, dass $f(x_0) < y$ gilt. Dann ist $x_0 < b$. Wegen der Stetigkeit von f gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt: Falls $|x - x_0| < \delta$ ist, dann ist der Abstand von $f(x)$ zu $f(x_0)$ kleiner als $y - f(x_0)$ – insbesondere ist damit $f(x) < y$. Damit gibt es Punkte rechts von x_0, die in M liegen. Das ist ein Widerspruch, da x_0 eine obere Schranke von M ist.

Nun nehmen wir widerspruchshalber an, dass $f(x_0) > y$ gilt. Dann ist $x_0 > a$. Indem wir wieder die Stetigkeit von f benutzen, sehen wir ähnlich wie im vorangehenden Absatz, dass für alle Punkte $x \in [a, b]$, die nahe genug bei x_0 liegen, die Ungleichung $f(x) > y$ gilt. Damit gibt es Punkte links von x_0, die obere Schranken von M sind. Das ist ein Widerspruch, da x_0 als die kleinste obere Schranke von M definiert ist.

Also kann weder $f(x_0) < y$ noch $f(x_0) > y$ gelten und somit ist $f(x_0) = y$. □

Die folgende Definition und das nachstehende Resultat haben Sie auf Präsenzblatt 4 behandelt. Um alle wichtigen Definitionen und Resultate im Manuskript zu haben, führen wir es der Vollständigkeit halber auch hier auf.[3]

Definition 2.1.11 (Einschränkung von Funktionen)**.** Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Funktion. Sei $L \subseteq X$. Dann heißt die Funktion

$$f|_L : L \to Y, \qquad x \mapsto f(x)$$

die **Einschränkung** oder **Restriktion** von f auf L.

Proposition 2.1.12 (Stetigkeit eingeschränkter Funktionen)**.** *Seien $z_0 \in L \subseteq M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$ stetig in z_0. Dann ist auch $f|_L$ stetig in z_0.*

Beweis. Das wurde in Aufgabe 2 auf Präsenzblatt 4 bewiesen. □

2.2 Konvexe und konkave Funktionen

Definition 2.2.1 (Konvexe und konkave Funktionen)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$.

(a) Die Funktion f heißt **konvex**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

gilt.

(b) Die Funktion f heißt **konkav**, falls für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ die Ungleichung

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

gilt.

[3] In der Vorlesung wird es an dieser Stelle jedoch nicht mehr besprochen.

Aus der Definition von konvexen und konkaven Funktionen folgt sofort, dass f genau dann konkav ist, wenn $-f$ konvex ist.

Beispiele 2.2.2 (Konvexität und Konkavität). (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist die affine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ sowohl konvex als auch konkav. Der Beweis ist eine Übungsaufgabe.

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist konvex.

Beweis. Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Wir bemerken zuerst, dass wegen $0 \leq (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ die Ungleichung

$$2x_1x_2 \leq x_1^2 + x_2^2 \tag{2.2.1}$$

gilt. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) &= (\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2)^2 = \lambda_1^2x_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2x_1x_2 + \lambda_2^2x_2^2 \\ &\leq \lambda_1^2x_1^2 + \lambda_1\lambda_2x_1^2 + \lambda_1\lambda_2x_2^2 + \lambda_2^2x_2^2 \\ &= \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)x_1^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2x_2^2 = \lambda_1f(x_1) + \lambda_2f(x_2), \end{aligned}$$

was die Konvexität von f beweist. □

Theorem 2.2.3 (Jensen-Ungleichung). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein nichtleeres Intervall und sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex. Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ derart, dass $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ist. Dann gilt*

$$f(\lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n) \leq \lambda_1f(x_1) + \dots + \lambda_nf(x_n).$$

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über n.

Für $n = 1$ ist $\lambda_1 = 1$ und somit $f(\lambda_1x_1) = f(x_1) = \lambda_1f(x_1)$.

Wir gehen nun von der Induktionhypothese aus, dass die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}^*$ und alle entsprechenden $x_1, \dots, x_n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ schon bewiesen ist. Seien jetzt $x_1, \dots, x_{n+1} \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} = 1$. Falls $\lambda_{n+1} = 1$ ist, sind die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle 0 und die gewünschte Ungleichung ist somit klar Sei nun also $\lambda_{n+1} < 1$. Wir setzen $\mu := \sum_{k=0}^n \lambda_k$ und erhalten dann $\mu \in (0,1]$. Es gilt $\mu + \lambda_{n+1} = 1$ und auch die Zahlen $\frac{\lambda_1}{\mu}, \dots, \frac{\lambda_n}{\mu}$ summieren sich zu 1. Also ist

$$\begin{aligned} f\Big(\lambda_1x_1 + \dots + \lambda_nx_n + \lambda_{n+1}x_{n+1}\Big) &= f\Big(\mu\big(\frac{\lambda_1}{\mu}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu}x_n\big) + \lambda_{n+1}x_{n+1}\Big) \\ &\leq \mu f\Big(\frac{\lambda_1}{\mu}x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu}x_n\Big) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq \mu\Big(\frac{\lambda_1}{\mu}f(x_1) + \dots + \frac{\lambda_n}{\mu}f(x_n)\Big) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &= \lambda_1f(x_1) + \dots + \lambda_nf(x_n) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned}$$

wobei die erste Ungleichung aus der Definition der Konvexitität von f folgt und die zweite Ungleichung aus der Induktionshypothese. □

Durch Übergang von einer Funktion f zu $-f$ erhält man die analoge Ungleichung auch für konkave Funktionen.

2.3 Wurzeln und rationale Exponenten

In diesem Abschnitt verwenden wir den Zwischenwertsatz (Theorem 2.1.10) um die Existenz von Wurzeln positiver Zahlen zu beweisen und Potenzen mit rationalen Exponenten einzuführen. Zunächst besprechen wir noch einmal in aller Kürzer, wie ganzzahlige Exponenten zu verstehen sind; bei dieser Gelegenheit tun wir dies gleich für komplexe Zahlen.

Vorlesung 9 (Mi, 13.11.) beginnt ab Definition 2.3.1

Definition 2.3.1 (Ganzzahlige Exponenten)**.** Sei $z \in \mathbb{C}$.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert man $z^n := z \cdots z$, wobei das Produkt aus n Faktoren besteht, die alle gleich z sind.

Außerdem definiert man $z^0 := 1$.[4]

(b) Sei $z \neq 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definiert man dann $z^{-n} := \frac{1}{z^n}$. Insbesondere ist somit $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

Proposition 2.3.2 (Rechenregeln für ganzzahlige Exponenten)**.**

(a) *Seien* $z \in \mathbb{C}$ *und* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. *Falls* $z \neq 0$ *oder* $n_1, n_2 \geq 0$ *ist, gilt*

$$z^{n_1+n_2} = z^{n_1} z^{n_2}.$$

(b) *Seien* $z \in \mathbb{C}$ *und* $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. *Falls* $z \neq 0$ *oder* $n_1, n_2 \geq 0$ *ist, gilt*

$$z^{n_1 n_2} = \left(z^{n_1}\right)^{n_2}.$$

(c) *Seien* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *und* $n \in \mathbb{Z}$. *Falls* $z_1, z_2 \neq 0$ *oder* $n \geq 0$ *ist, gilt*

$$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n.$$

Beweis. (a) Wir betrachten zuerst den Fall, in dem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ gilt und $z \in \mathbb{C}$ beliebig ist. Falls mindestens eine der beiden Zahlen n_1 und n_2 gleich 0 ist, folgt wegen $z^0 = 1$ sofort, dass $z^{n_1+n_2} = z^{n_1} z^{n_2}$ gilt. Seien nun also $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$z^{n_1+n_2} = \underbrace{z \cdots z}_{n_1+n_2 \text{ Faktoren}} = \underbrace{z \cdots z}_{n_1 \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{z \cdots z}_{n_2 \text{ Faktoren}} = z^{n_1} z^{n_2}.$$

(b) und (c) Der Beweis verläuft ähnlich wie der Beweis von (a); wir verzichten auf die Details. □

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten besitzen die folgenden Konvexitätseigenschaften:

[4] Insbesondere definiert man also $0^0 := 1$. Leider wird in manchen Schulbüchern die Behauptung verbreitet, man würde den Ausdruck 0^0 in der Mathematik üblicherweise undefiniert lassen. Das stimmt allerdings nicht: Zahlreiche Formeln – beispielsweise die Binomialformel, die Sie in Grundlagen der Mathematik lernen, oder die Taylor-Entwicklung, die Sie in der Analysis noch lernen werden – kann man nur dann problemlos und effizient verwenden, wenn man 0^0 als 1 definiert.

Proposition 2.3.3 (Konvexität von Monomfunktionen). *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$.*

(a) *Falls n gerade ist, ist f konvex.*

(b) *Falls n ungerade ist, ist die Einschränkung $f|_{[0,\infty)}$ konvex und die Einschränkung $f|_{-\infty,0]}$ konkav.*

Beweis. Man kann den Beweis bereits mit den Hilfsmitteln führen, die uns im Moment zur Verfügung stehen. Wenn Sie wissen möchten, wie das geht, können Sie es in Addendum 2.4 nachlesen. In der Vorlesungen verzichten wir an dieser Stelle auf den Beweis – wir werden später, wenn wir über Ableitungen von Funktionen sprechen, Konvexität mit Hilfe der zweiten Ableitung charakterisieren, wodurch der Beweis dieser Proposition dann extrem einfach wird. □

Für Zahlen in $(0,\infty)$ kann man auch Potenzen mit rationalen Exponenten definieren. Die Grundlage dafür ist die folgende Proposition, die wir mit Hilfe des Zwischenwertsatzes beweisen:

Proposition 2.3.4 (Existenz und Eindeutigkeit von $\boldsymbol{n}$-ten Wurzeln). *Seien $k, \ell \in \mathbb{Z}$ mit $\ell \neq 0$ und sei $y \in (0,\infty)$. Dann gibt es genau eine Zahl $x_0 \in (0,\infty)$, welche die Gleichung $x_0^\ell = y^k$ erfüllt. Diese Zahl x_0 hängt nur vom Quotienten $\frac{k}{\ell}$ ab.*

Beweis. Existenz: Wir betrachten zunächst den Fall $\ell > 0$, das heißt, $\ell \in \mathbb{N}$.

Es gilt $y^k \in (0,\infty)$. Wir setzen $a := \min\{y^k, 1\}$ und $b := \max\{y^k, 1\}$; dann ist $0 < a \leq b$. Lassen Sie uns die Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\ell$ betrachten. Diese Funktion ist stetig, da Monomfunktionen laut Beispiel 2.1.7 stetig sind. Wegen $a \leq 1$ und $b \geq 1$ ist dann $f(a) = a^\ell \leq a \leq y \leq b \leq b^\ell = f(b)$. Also folgt aus dem Zwischenwertsatz (Theorem 2.1.10), dass es ein $x_0 \in [a,b] \subseteq (0,\infty)$ gibt, dass $y^k = f(x_0) = x_0^\ell$ erfüllt.

Den Fall $\ell < 0$ kann man auf den vorangehenden Fall zurückführen, da die Gleichung $x_0^\ell = y^k$ äquivalent zur Gleichung $x_0^{-\ell} = y^{-k}$ ist.

Eindeutigkeit: Es genügt, die Eindeutigkeit im Fall $\ell > 0$ zu zeigen,[5] also sei $\ell \in \mathbb{N}$. Seien $x_0, x_1 \in (0,\infty)$ derart, dass $x_0^\ell = y^k = x_1^\ell$ gilt. Wäre $x_0 < x_1$, würde aus Proposition 1.2.4(c) die Ungleichung $x_0^k < x_1^\ell$ folgen, was ein Widerspruch ist. Ebenso zeigt man, dass nicht $x_1 < x_0$ gelten kann. Also ist $x_0 = x_1$.

Die Lösung x_0 hängt nur vom Bruch $\frac{k}{\ell}$ ab: Seien zwei weitere Zahlen $\tilde{k}, \tilde{\ell} \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{\ell} \neq 0$ gegeben, die $\frac{\tilde{k}}{\tilde{\ell}} = \frac{k}{\ell}$ erfüllen. Sei $\tilde{x}_0 \in (0,\infty)$ die – wie bereits bewiesen, existente und eindeutig bestimmte – Lösung von $\tilde{x}_0^{\tilde{\ell}} = y^{\tilde{k}}$. Dann gilt

$$\tilde{x}_0^{\tilde{\ell}\ell} = y^{\tilde{k}\ell} = y^{k\tilde{\ell}} = x_0^{\tilde{\ell}\ell}.$$

Wegen der bereits bewiesenen Eindeutigkeit folgt daraus $\tilde{x}_0 = x_0$. □

[5] Wieso?

Aufgrund der vorangehenden Proposition ergibt die folgende Definition Sinn.

Definition 2.3.5 (Rationale Exponenten)**.** Sei $q = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Sei $y \in (0, \infty)$. Mit der Notation $y^{\frac{k}{\ell}}$ (oder kürzer y^q) bezeichnet man diejenige Zahl $x_0 \in (0, \infty)$, welche die Gleichung $x_0^\ell = y^k$ erfüllt. Falls $q > 0$ ist, definiert man außerdem $0^q = 0$.

Im Falle $k = 1$ schreibt man auch $y^{\frac{1}{\ell}} =: \sqrt[\ell]{y}$ und nennt diese Zahl die ℓ-te Wurzel von y.

Für rationale Exponenten gelten dieselben Rechenregeln wie wir sie für ganzzahlige Exponenten bereits in Proposition 2.3.2 gesehen haben:

Proposition 2.3.6 (Rechenregeln für rationale Exponenten)**.**

(a) *Seien $x \in [0, \infty)$ und $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Falls $x \neq 0$ oder $q_1, q_2 \geq 0$ ist, gilt*

$$x^{q_1+q_2} = x^{q_1} x^{q_2}.$$

(b) *Seien $x \in [0, \infty)$ und $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$. Falls $x \neq 0$ oder $q_1, q_2 \geq 0$ ist, gilt*

$$x^{q_1 q_2} = \big(x^{q_1}\big)^{q_2}.$$

(c) *Seien $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ und $q \in \mathbb{Q}$. Falls $x_1, x_2 \neq 0$ oder $q \geq 0$ ist, gilt*

$$(x_1 x_2)^q = x_1^q x_2^q.$$

Beweis. Der Beweis folgt leicht aus Definition 2.3.5 und Proposition 2.3.2. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Details. □

Die folgenden Begriffe werden auf Hausaufgabenblatt 6 eingeführt. Der Vollständigkeit halber führen wir die Definition auch im Manuskript auf.

Definition 2.3.7 (Monotone Funktionen)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und sei $f : M \to \mathbb{R}$.

(a) Die Funktion f heißt **monoton zunehmend** oder **monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \leq x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ gilt.

Die Funktion f heißt **strikt monoton zunehmend** oder **strikt monoton wachsend**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) < f(x_2)$ gilt.

(b) Die Funktion f heißt **monoton abnehmend** oder **monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 \leq x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ gilt.

Die Funktion f heißt **strikt monoton abnehmend** oder **strikt monoton fallend**, falls für alle $x_1, x_2 \in M$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

Einige Monotonieeigenschaften von Potenzen werden Sie auf Hausaufgabenblatt 6 beweisen.

2.4 Addendum: Konvexität von Monomfunktionen

In diesem Addendum geben wir einen Beweis von Proposition 2.3.3, der ohne Differentialrechnung auskommt. Die entscheidende Einsicht für den Beweis ist das folgende Lemma:

Lemma 2.4.1. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, seien $f, g : I \to [0, \infty)$ konvex und für alle $x_1, x_2 \in I$ sei $\big(f(x_2) - f(x_1)\big)\big(g(x_2) - g(x_1)\big) \geq 0$. Dann ist fg ebenfalls konvex.*

Beweis. Wir betrachten beliebige, aber feste Zahlen $x_1, x_2 \in I$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, die $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ erfüllen. Wegen der Voraussetzung $\big(f(x_2) - f(x_1)\big)\big(g(x_2) - g(x_1)\big) \geq 0$ gilt

$$f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1) \leq f(x_2)g(x_2) + f(x_1)g(x_1). \tag{2.4.1}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&(fg)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\
&\quad = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \\
&\quad \leq \big(\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)\big)\big(\lambda_1 g(x_1) + \lambda_2 g(x_2)\big) \\
&\quad = \lambda_1^2 f(x_1)g(x_1) + \lambda_2^2 f(x_2)g(x_2) + \lambda_1\lambda_2\big(f(x_1)g(x_2) + f(x_2)g(x_1)\big) \\
&\quad \overset{(2.4.1)}{\leq} \lambda_1^2 f(x_1)g(x_1) + \lambda_2^2 f(x_2)g(x_2) + \lambda_1\lambda_2\big(f(x_2)g(x_2) + f(x_1)g(x_1)\big) \\
&\quad = \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2)f(x_1)g(x_1) + (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda_2 f(x_2)g(x_2) \\
&\quad = \lambda_1 (fg)(x_1) + \lambda_2 (fg)(x_2),
\end{aligned}$$

wobei wir für die erste Ungleichung benutzt haben, dass f und g konvex sind und nur Werte in $[0, \infty)$ annehmen. □

Für den Beweis von Proposition 2.3.3 verwenden wir außerdem die folgende Variante der geometrischen Summenformel:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \forall a, b \in \mathbb{C}: \qquad (b - a)\sum_{k=0}^{n} b^{n-k}a^k = b^{n+1} - a^{n+1}. \tag{2.4.2}$$

Diese Formel kann man zum Beispiel per Induktion über n beweisen.

Beweis von Proposition 2.3.3. Um die Abhängigkeit der Funktion f vom Exponenten n deutlich zu machen – diese wird im Beweis eine Rolle spielen – schreiben wir f_n anstelle von f.

(a) Wenn n gerade ist, können wir es als $n = 2m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ schreiben. Wir führen den Beweis per Induktion über m.

Induktionsanfang: Für $m = 1$ gilt $f_{2m} = f_2(x) = x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Für diese Funktion haben wir in Beispiel (b) gezeigt, dass sie konvex ist.

Induktionshypothese: Sei für ein festes $m \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen, dass die Funktion f_{2m} konvex ist.

Induktionsschritt von m auf $m+1$: Es gilt $f_{2(m+1)} = f_{2m} f_2$. Wir werden Lemma 2.4.1 auf die Funktionen f_{2m} und f_2 anwenden und überprüfen dazu, dass die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt sind:

Die Funktionen f_{2m} und f_2 bilden beide nach $[0, \infty)$ ab, da Quadrate reeller Zahlen immer ≥ 0 sind. Außerdem sind beide Funktionen konvex laut Induktionshypothese und Induktionsanfang. Um die letzte verbleibende Voraussetzung zu überprüfen, betrachten wir beliebige, aber feste Zahlen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Zur Vereinfachung der Notation setzen wir $y_1 \coloneqq x_1^2 \geq 0$ und $y_2 \coloneqq x_2^2 \geq 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\big(f_{2m}(x_2) - f_{2m}(x_1)\big)\big(f_2(x_2) - f_2(x_1)\big) &= (x_2^{2m} - x_1^{2m})(x_2^2 - x_1^2) \\ &= \big(y_2^m - y_1^m\big)(y_2 - y_1) \\ &= (y_2 - y_1)^2 \sum_{k=0}^{m-1} y_2^{m-1-k} y_1^k \geq 0,\end{aligned}$$

wobe wir für die letzte Gleichheit wegen der geometrischen Summenformel 2.4.2 gilt. Also sind die Voraussetzungen von Lemma 2.4.1 erfüllt und somit ist das Produkt $f_{2(m+1)} = f_{2m} f_2$ konvex.

(b) Wenn n ungerade ist, können wir es in der Form $n = 2m - 1$ für ein $m \in \mathbb{N}$ schreiben.

Um die Konvexität von $f_n|_{[0,\infty)} = f_{2m-1}|_{[0,\infty)}$ zu zeigen, kann man nun im Beweis von (a) per Induktion über m vorgehen. Die Einschränkung auf die Menge $[0, \infty)$ wird hierbei an zwei Stellen benutzt:

Zum einen, damit die Voraussetzung von Lemma 2.4.1 erfüllt ist, dass die Funktionen, die man multipliziert, nach $[0, \infty)$ abbilden. Und zum anderen um die Ungleichung $\big(f_{2m-1}(x_2) - f_{2m-1}(x_1)\big)\big(f_2(x_2) - f_2(x_1)\big) \geq 0$ zu beweisen: Man geht ähnlich wie in (a) vor, aber nun sind nicht alle auftretenden Terme Quadrate; deshalb braucht man, dass x_1 und x_2 selbst in $[0, \infty)$ liegen.

Die Konvexität von $f_{2m-1}|_{[0,\infty)}$ liefert zusammen mit dem Lemma, das wir nach diesem Beweis angeben, dass die Funktion $-f_{2m-1}|_{(-\infty,0]}$ ebenfalls konvex ist, und somit ist $f_{2m-1}|_{(-\infty,0]}$ konkav. □

Um ganz am Ende des soeben abgeschlossenen Beweises die Konkavität von $f_{2m-1}|_{(-\infty,0]}$ zu erhalten, hatten wir auf das folgende Lemma verwiesen.

Lemma 2.4.2 (Konvexität bleibt bei Achsenspiegelung erhalten)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann ist auch die Funktion*

$$\begin{aligned} g\colon -I &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(-x) \end{aligned}$$

konvex.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus der Definition von Konvexität. □

Kapitel 3

Folgen, Reihen und Konvergenz

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition 3.1.1 (Folgen)**.** Sei M eine Menge. Eine Auflistung von Elementen von M der Form

$$(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

(wobei die Indizes durch $\mathbb{N}$ laufen) nennt man eine **Folge** in M. Man notiert eine solche Folge auch kurz als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. [1]

Die Elemente x_n heißen die **Glieder** der Folge.

Man kann stattdessen auch Folgen betrachten, die als Indexmenge $\mathbb{N}_0$ haben und das werden wir auch immer wieder tun. Für die Entwicklung der Theorie macht es keinen Unterschied, ob man als Indexmenge $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{N}_0$ verwendet; manchmal macht eine der beiden Indexmengen aber die Formeln, mit denen man arbeitet, etwas einfacher. Deshalb ist es gut, beide Möglichkeiten zur Verfügung zu haben.

Im Folgenden werden wir Folgen in den reellen oder, allgemeiner, den komplexen Zahlen betrachten. Uns interessiert dabei insbesondere die Frage, wann die Glieder einer Folge sich mit größer werdendem Index immer weiter an eine feste Zahl annähern. Dieses Verhalten präzisieren wir in der folgenden Definition:

Definition 3.1.2 (Konvergente und divergente Folgen)**.** Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Wir sagen, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z **konvergiert** oder **konvergent** ist, falls folgendes gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \ge n_0 \colon \; |z_n - z| < \varepsilon.$$

In diesem Fall nennt man z den **Grenzwert** oder **Limes** der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und notiert dies als $z_n \to z$ für $n \to \infty$ oder als $z_n \overset{n\to\infty}{\to} z$ oder als $z = \lim_{n\to\infty} z_n$.

[1] Falls Ihnen das zu informal ist, kann man auch exakter definieren: Eine Folge in M ist eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to M$ und man benutzt für Argumente $n \in \mathbb{N}$ dann häufig die Indexschreibweise x_n anstelle der Argumentschreibweise $x(n)$.

(b) Man sagt, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** oder **konvergent** ist, falls es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert.

(c) Man sagt, dass die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **divergiert** oder **divergent** ist, falls sie nicht konvergiert.

In der vorangehendem Definition haben wir von "dem" Grenzwert einer Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gesprochen und ihn mit dem Symbol $\lim_{n\to\infty} z_n$ bezeichnet. Das ergibt nur dann Sinn, wenn eine Folge nicht mehrere verschiedene Grenzwerte haben kann. Dass dies tatsächlich nicht passieren kann, zeigen wir in der folgenden Proposition.

Proposition 3.1.3 (Eindeutigkeit des Grenzwertes)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann besitzt $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ höchstens einen Grenzwert.*

Vorlesung 10 (Fr, 15.11.) beginnt mit dem Beweis von Propositi- on 3.1.3

Beweis. Seien $z, \tilde{z} \in \mathbb{C}$ Grenzwerte von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir nehmen widerspruchshalber an, dass $z \neq \tilde{z}$ ist. Dann gilt $z - \tilde{z} \neq 0$ und wir betrachten nun die reelle Zahl

$$\varepsilon := \frac{|z-\tilde{z}|}{2} > 0.$$

Da die Folge nach Voraussetzzung sowohl gegen z als auch gegen $\tilde{z}$ konvergiert, gibt es laut Definition der Konvergenz Indizes $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Implikationen gelten:

$$(n \geq n_0 \;\Rightarrow\; |z_n - z| < \varepsilon) \qquad \text{und} \qquad (n \geq n_1 \;\Rightarrow\; |z_n - \tilde{z}| < \varepsilon)$$

Nehmen wir nun irgendeine Zahl $n \in \mathbb{N}$, die $n \geq n_0$ und $n \geq n_1$ erfüllt (zum Beispiel $n = \max\{n_0, n_1\}$). Dann gilt $|z_n - z| < \varepsilon$ und $|z_n - \tilde{z}| < \varepsilon$. Somit ist

$$|z-\tilde{z}| = |(z-z_n) + (z_n - \tilde{z})| \leq |z - z_n| + |z_n - \tilde{z}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |z - \tilde{z}|\,,$$

was ein Widerspruch ist. □

Beispiele 3.1.4 (Einige konvergente und divergente Folgen)**.**

(a) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0.

Beweis. Betrachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Laut Proposition 1.2.10(a) (die eine Folgerung aus dem Archimedischen Axiom 1.2.9 ist) gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$, das $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ erfüllt. Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ und nehmen wir $n \geq n_0$ an. Dann ist

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

(b) Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

Beweis. Wir müssen die Verneinung der Aussage

$$\exists z \in \mathbb{C}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0 \colon\ |z_n - z| < \varepsilon$$

zeigen, das heißt, wir müssen

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} \colon \quad (n \geq n_0\ \wedge\ |z_n - z| \geq \varepsilon)$$

beweisen.

Betrachten wir also ein beliebiges, festes $z \in \mathbb{C}$. Dann hat z von mindestes einer der beiden Zahlen 1 und -1 mindestesn Abstand 1, das heißt, es gilt $|z - 1| \geq 1$ oder $|z - (-1)| \geq 1$.[2] Wir wählen nun $\varepsilon := 1$ und betrachten ein beliebiges, festes $n_0 \in \mathbb{N}$. Um die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ mit den gewünschten Eigenschaften zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle:

- *1. Fall:* $|z - 1| \geq 1$.
  In diesem Fall wählen wir n als eine gerade Zahl, die $\geq n_0$ ist. Dann gilt $|z_n - z| = |1 - z| = |z - 1| \geq 1 = \varepsilon$.
- *2. Fall:* $|z - 1| < 1$.
  In diesem Fall muss, wie oben bereits bemerkt, $|z - (-1)| \geq 1$ gelten. Wir wählen n nun als eine ungerade Zahl, die $\geq n_0$ ist. Dann gilt $|z_n - z| = |(-1) - z| = |z - (-1)| \geq 1 = \varepsilon$.

Somit ist die Behauptung bewiesen. □

Proposition 3.1.5 (Grenzwerte reeller Folgen)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann gilt auch $z \in \mathbb{R}$.*

Beweis. Wir nehmen widerspruchshalber an, dass $z \notin \mathbb{R}$ gilt. Dann ist $\varepsilon := |\operatorname{Im} z| > 0$. Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|z_n - z| < \varepsilon$ gilt. Insbesondere erhalten wir für jedes solche n

$$\varepsilon > |z - z_n| \geq |\operatorname{Im}(z - z_n)| = |\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} z_n| = |\operatorname{Im} z| = \varepsilon,$$

wobei wir für die zweite Gleichheit verwendet haben, dass $z_n \in \mathbb{R}$ gilt. Also folgt $\varepsilon > \varepsilon$, ein Widerspruch. □

Definition 3.1.6 (Bestimmte und unbestimmte Divergenz reeller Folgen)**.** Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

[2] Diese Aussage ist geometrisch klar. Können Sie sie auch rechnerisch beweisen, indem Sie die Dreiecksungleichung verwenden?

(a) Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bestimmt gegen ∞ divergiert** oder **uneigentlich gegen ∞ konvergiert**,[3] falls folgendes gilt:

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0\colon\ x_n > c$$

In diesem Fall schreibt man $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ oder $x_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(b) Wir sagen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **bestimmt gegen $-\infty$ divergiert** oder **uneigentlich gegen $-\infty$ konvergiert**, falls folgendes gilt:

$$\forall c \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0\colon\ x_n < c$$

In diesem Fall schreibt man $x_n \to -\infty$ für $n \to \infty$ oder $x_n \overset{n\to\infty}{\to} -\infty$ oder $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

(c) Wir sagen, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **unbestimmt divergiert**, falls sie divergiert, aber nicht bestimmt gegen ∞ divergiert und nicht bestimmt gegen $-\infty$ divergiert.

Definition 3.1.7 (Beschränktheit von Folgen)**.** Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ heißt **beschränkt**, falls die Menge $M \coloneqq \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ihrer Folgenglieder beschränkt ist.

Proposition 3.1.8 (Konvergenz monotoner beschränkter Folgen)**.** *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und bezeichne $M \coloneqq \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ die Menge ihrer Folgenglieder.*

(a) *Falls die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton steigend** ist – das heißt, falls $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots$ gilt – dann konvergiert die Folge gegen* $\sup M$.

(b) *Falls die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton fallend** ist – das heißt, falls $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots$ gilt – dann konvergiert die Folge gegen* $\inf M$.

Beweis. (a) Da M nichtleer und beschränkt ist, besitzt M wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (Axiom 1.2.14) tatsächlich ein Supremum.

Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Da $\sup M$ die kleinste obere Schranke von M ist, ist $\sup M - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Somit gibt es ein Element $m \in M$ mit der Eigenschaft $m > \sup M - \varepsilon$. Wegen der Definition von M gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $x_{n_0} = m$. Also ist $x_{n_0} > \sup M - \varepsilon$. Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$, das $n \geq n_0$ erfüllt. Da die Folge monoton steigend ist, gilt $x_n \geq x_{n_0}$ und somit

$$\sup M + \varepsilon > \sup M \geq x_n \geq x_{n_0} \geq \sup M - \varepsilon.$$

Also gilt $|x_n - \sup M| < \varepsilon$.

(b) Der Beweis verläuft analog zum Beweis von (a). Alternativ kann man Aussage (b) auf Aussage (a) zurückführen, indem man die Folge $(-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet. $\square$

[3] Wichtig: Eine Folge, die uneigentlich gegen ∞ konvergiert, ist nicht (!) konvergent im Sinne von Definition 3.1.2(b).

Proposition 3.1.9. *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$.*

(a) *Wenn M nichtleer und nach oben beschränkt ist, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen $\sup M$ konvergiert.*

(b) *Wenn M nichteer und nach unten beschränkt ist, dann gibt es eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen $\inf M$ konvergiert.*

Beweis. (a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\sup M - \frac{1}{n}$ keine obere Schranke von M und es gibt somit eine Zahl $x_n \in M$ mit der Eigenschaft $x_n > \sup M - \frac{1}{n}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt in M und wir zeigen nun, dass sie gegen $\sup M$ konvergiert.

Dazu betrachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Laut Proposition 1.2.10(a) (die wir aus dem Archimedischen Axiom 1.2.9 gefolgert haben) gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Aufgrund der Wahl von x_n gilt dann $\sup M - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup M$ und somit

$$|x_n - \sup M| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

Somit gilt $x_n \to \sup M$ für $n \to \infty$.

(b) Diese Aussage kann man analog beweisen wie Aussage (a). $\square$

3.2 Konvergenz von Teilfolgen

Definition 3.2.1 (Teilfolge)**.** Sei M eine Menge und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M. Unter einer **Teilfolge** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ versteht man eine Folge, die man erhält, indem man manche[4] Folgenglieder weglässt, sofern noch unendlich viele Folgenglieder übrigbleiben.

Indem man die Teilfolge wieder über $\mathbb{N}$ indiziert, kann man sie in der Form $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für geeignete natürliche Zahlen

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

schreiben.

Vorlesung 11 (Mi, 20.11.) beginnt mit Beispiel 3.2.2

Beispiele 3.2.2 (Einige Teilfolgen)**.**

(a) Jede Folge ist eine Teilfolge von sich selbst.

(b) Die Folge $(\frac{1}{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$.

(c) Die konstante Folge $(-1)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 3.2.3 (Konvergenz von Teilfolgen)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$, die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Dann konvergiert jede Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls gegen z.*

[4] Oder keine.

Beweis. Betrachten wir eine beliebige, feste Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $n_k \geq k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|z_n - z| < \varepsilon$ gilt.

Setze nun $k_0 := n_0$. Betrachten wir ein beliebiges, festes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Dann gilt $n_k \geq k \geq k_0 = n_0$ und somit $|z_{n_k} - z| < \varepsilon$. Damit ist die Konvergenz von $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen z bewiesen. □

Theorem 3.2.4 (Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Betrachten wir eine beliebige, feste Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, die beschränkt ist. Wegen Proposition 3.1.8 genügt es zu beweisen, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton steigende oder eine monoton fallende Teilfolge besitzt. Dazu definieren wir

$$I := \{m \in \mathbb{N} \mid \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n > m \text{ gilt } x_n > x_m\}$$

und unterscheiden zwei Fälle:

- *1. Fall:* Die Menge I besitzt unendlich viele Elemente.

  Dann finden wir Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, die alle in I liegen. Laut Definition von I is $x_{n_1} < x_{n_2} < x_{n_3} < \ldots$, das heißt, die Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton steigend.

- *2. Fall:* Die Menge I besitzt höchstens endlich viele Elemente.

  In diesem Fall bauen wir folgendermaßen eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Wir wählen n_1 als eine Zahl in $\mathbb{N}$, die größer als jedes Element von I ist. Wegen $n_1 \notin I$ gibt es ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 > n_1$ und $x_{n_2} \leq x_{n_1}$. Es ist $n_2 \notin I$ und somit gibt es ein $n_3 \in \mathbb{N}$ mit $n_3 > n_2$ und $x_{n_3} \leq x_{n_2}$. Dieses Verfahren können wir immer weiter fortsetzen und erhalten so eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $x_{n_1} \geq x_{n_2} \geq x_{n_3} \geq \ldots$ gilt, das heißt, diese Teilfolge ist monoton fallend.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Korollar 3.2.5 (Bolzano–Weierstraß in $\mathbb{C}$). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Betrachten wir eine beliebige, aber feste Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{C}$ die beschränkt ist. Dann ist $(\operatorname{Re} z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ und besitzt somit laut Theorem 3.2.4 eine Teilfolge $(\operatorname{Re} z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Weil $(\operatorname{Im} z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ ist, besitzt sie wiederum – ebenfalls laut Theorem 3.2.4 – eine Teilfolge $(\operatorname{Im} z_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $y \in \mathbb{R}$ konvergiert. Laut Proposition 3.2.3 konvergiert $(\operatorname{Re} z_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ gegen x. Wegen der

Aufgaben 2 und 3 auf Präsenzblatt 6 und Aufgabe 3(b) auf Hausaufgabenblatt 6 konvergiert somit insgesamt die Teilfolge

$$\big(z_{n_{k_j}}\big)_{j\in\mathbb{N}} = \big(\operatorname{Re} z_{n_{k_j}} + \mathrm{i}\operatorname{Im} z_{n_{k_j}}\big)_{j\in\mathbb{N}}$$

von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x + \mathrm{i}y$. □

3.3 Konsequenzen für stetige Funktionen

Theorem 3.3.1 (Stetigkeit vs. Folgenstetigkeit)**.** *Sei $z_0 \in M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f\colon M \to \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Funktion f ist in z_0 stetig.*

(ii) *Für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen z_0 konvergiert, konvergiert die Folge $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z_0)$.*

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Nehmen wir an, dass f stetig in z_0 ist. Wir betrachten eine beliebige, feste Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen z_0 konvergiert und wir müssen zeigen, dass $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z_0)$ konvergiert.

Dazu betrachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f in z_0 gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes $z \in M$ die folgende Implikation gilt:

$$(*) \qquad |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Weil $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen z_0 konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung $|z_n - z_0| < \delta$ gilt.

Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Wegen $|z_n - z_0| < \delta$ und $z_n \in M$ folgt nun aus der Implikation $(*)$, dass $|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon$ gilt.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Wir beweisen die Kontraposition der gewünschten Implikation, das heißt, wir nehmen nun an, dass f nicht stetig in z_0 ist; wir müssen beweisen, dass (ii) falsch ist. Da f nicht stetig in z_0 ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ für das folgendes gilt:

$$\forall \delta > 0\ \exists z \in M\colon \quad \big(|z - z_0| < \delta \ \wedge\ |f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon\big)$$

Insbesondere gibt es also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in M$, für welches $|z_n - z_0| < \frac{1}{n}$, aber $|f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon$ gilt. Also konvergiert die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M gegen z_0, aber die Folge $\big(f(z_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen $f(z_0)$, das heißt, wir haben wie gewünscht bewiesen, dass (ii) falsch ist. □

Definition 3.3.2 (Abgeschlossene Mengen)**.** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ heißt **abgeschlossen** – oder genauer **abgeschlossen in** $\mathbb{C}$ –, falls für jede Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, gilt, dass der Grenzwert ebenfalls in M liegt.

Beispiele 3.3.3 (Einige abgeschlossene Mengen)**.** (a) Die Menge $\mathbb{R}$ ist laut Proposition 3.1.5 abgeschlossen in $\mathbb{C}$.

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Intervalle $[a, b]$, $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ abgeschlossen. Das besprechen wir in den Übungen.

(c) Für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ und jedes $r \in [0, \infty)$ ist, wie der Name bereits andeutet, die abgeschlossene Kreisscheibe $B_{\leq r}(z_0)$ abgeschlossen. Das besprechen wir ebenfalls in den Übungen.

Proposition 3.3.4 (Stetige Bilder von beschränkten, abgeschlossenen Mengen)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte und abgeschlossene Menge und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das* ***Bild*** *$f(M) := \{f(z) \mid z \in M\}$ von f ebenfalls beschränkt und abgeschlossen.*

Beweis. Wir zeigen zuerst die Beschränktheit von $f(M)$. Dazu nehme wir widerspruchshalber an, dass $f(M)$ unbeschränkt ist. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in M$ mit der Eigenschaft $|f(z_n)| \geq n$.

Da M beschränkt ist, besitzt die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ laut Korollar 3.2.5 des Satzes von Bolzano–Weierstraß eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $z \in \mathbb{C}$ konvergiert. Da M nach Voraussetzung abgeschlossen ist, gilt zudem $z \in M$. Laut Theorem 3.3.1 konvergiert $\big(f(z_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen $f(z)$. Es folgt leicht aus der Definition von Konvergenz, dass jede konvergente Folge beschränkt ist,[5] also ist die Folge $\big(f(z_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Dies ist aber ein Widerspruch, da $|f(z_{n_k})| \geq n_k \geq k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt.Also ist $f(M)$ tatsächlich beschränkt. [6]

Die Abgeschlossenheit von $f(M)$ kann man mit einem sehr ähnlichen Argument zeigen.[7] Wir verzichten an dieser Stelle auf die Details. ☐

Wenn eine Funktion beschränktes Bild hat, dann nennt man dieses Funktion häufig ebenfalls **beschränkt**.

Vorlesung 12 (Fr, 22.11.) beginnt mit Theorem 3.3.5

Theorem 3.3.5 (Existenz von Maximal- und Minimalstellen)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine nichtleere, beschränkte und abgeschlossene Menge und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es Punkte $z_{\min}, z_{\max} \in M$ derart, dass*

$$f(z_{\min}) \leq f(z) \leq f(z_{\max})$$

für alle $z \in M$ gilt.

Beweis. Laut Proposition 3.3.4 ist das Bild $f(M)$ beschränkt. Außerdem ist $f(M)$ nach Voraussetzung eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ und es ist $f(M)$ nichtleer, da M nach Voraussetzung nichtleer ist.

Wegen der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (Axiom 1.2.14) besitzt also $f(M)$ ein Supremum in $\mathbb{R}$. Laut Proposition 3.1.9(a) gibt es eine Folge in $f(M)$, die gegen $\sup f(M)$ konvergiert, das heißt, es gibt eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M derart, dass $f(z_n) \to \sup f(M)$ gilt.

[5] Wie genau zeigt man das?

[6] An welcher Stelle haben wir im Satz vor dieser Fußnote das Archimedische Axiom 1.2.9 verwendet?

[7] Dazu geht man allerdings am einfachsten ohne Widerspruchsbeweis vor.

Da M beschränkt ist, besitzt die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ laut Korollar 3.2.5 des Satzes von Bolzano–Weierstraß eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen eine Zahl $z_{\max} \in \mathbb{C}$ konvergiert. Da M nach Voraussetzung abgeschlossen ist, gilt $z_{\max} \in M$. Laut Theorem 3.3.1 gilt $f(z_{n_k}) \to f(z)$ für $k \to \infty$. Dieselbe Folge konvergiert aber wegen Proposition 3.2.3 auch gegen $\sup f(M)$. Da Folgen laut Proposition 3.1.3 höchstens einen Grenzwert besitzen, folgt $f(z_{\max}) = \sup f(M)$. Also ist $f(z_{\max})$ insbesondere eine obere Schranke von $f(M)$. Da $f(z_{\max})$ zugleich ein Element von $f(M)$ ist, ist es das größte Elemente von $f(M)$. Also gilt $f(z) \leq f(z_{\max})$ für alle $z \in M$.

Die Existenz von $z_{\min}$ beweist man analog. □

Zur Erinnerung: Wenn $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon M \to \mathbb{C}$ ist, dann heißt die Funktion f stetig, falls sie in jedem $z_0 \in M$ stetig ist, das heißt, falls folgendes gilt:

$$\forall z_0 \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in M\colon \quad (|z - z_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon)$$

Beachten Sie, dass man die beiden Quantoren $\forall z_0 \in M\ \forall \varepsilon > 0$ am Anfang der Aussage vertauschen kann, ohne die Ausssage zu ändern, da es sich bei beiden um Allquantoren handelt.

Der Begriff **gleichmäßige Stetigkeit**, den wir nun definieren, bedeutet, dass man δ unabhängig von z_0 wählen kann, das heißt, dass dann die Quantifizierung $\forall z_0 \in M$ sogar rechts der Quantifizierung $\exists \delta > 0$ stehen darf:

Definition 3.3.6 (Gleichmäßige Stetigkeit)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon M \to \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt **gleichmäßig stetig**, falls die Aussage

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall w, z \in M\colon \quad (|z - w| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - f(w)| < \varepsilon)$$

gilt.

Aus der Definition 3.3.6 ist klar, dass gleichmäßige Stetigkeit einer Funktion impliziert, dass die Funktion stetig ist. Die umgekehrte Implikation gilt im Allgemeinen nicht, wie das folgende Beispiel zeigt:

Beispiel 3.3.7 (Stetigkeit vs. gleichmäßige Stetigkeit)**.** Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$. Dann ist f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Beweis. Dass die Funktion stetig ist, wissen wir bereits aus Beispiel 2.1.7. Wir zeigen nun die Verneinung der Aussage aus der Definition gleichmäßiger Stetigkeit, das heißt, wir beweisen, dass folgendes gilt:

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists w, z \in \mathbb{C}\colon \quad (|z - w| < \delta \ \wedge\ |f(z) - f(w)| \geq \varepsilon)$$

Hierzu wählen wir zum Beispiel $\varepsilon := 1$. Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $\delta > 0$. Wir setzen $w := \frac{1}{\delta}$ und $z := w + \frac{\delta}{2} = \frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $|z - w| = \frac{\delta}{2} < \delta$ und

$$|f(z) - f(w)| = \left|\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\delta}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{\delta}\right)^2\right| = \left|\frac{1}{\delta^2} + 1 + \frac{\delta^2}{4} - \frac{1}{\delta^2}\right| = 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1 = \varepsilon.$$

Also ist f tatsächlich nicht gleichmäßig stetig. □

Theorem 3.3.8 (Automatische Gleichmäßigkeit der Stetigkeit)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn M abgeschlossen und beschränkt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir nehmen widerspruchshalber an, dass f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \delta > 0\ \exists w, z \in M : \quad (|z - w| < \delta\ \wedge\ |f(z) - f(z)| \geq \varepsilon)$$

Insbesondere finden wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ zwei Zahlen $z_n, w_n \in M$, welche

$$(*) \qquad |z_n - w_n| < \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad |f(w_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$$

erfüllen. Weil M nach Voraussetzung beschränkt ist, gibt es laut Korollar 3.2.5 zum Theorem 3.2.5 von Bolzano–Weierstraß eine Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen eine Zahl $z_0 \in \mathbb{C}$ konvergiert. Da M nach Voraussetzung abgeschlossen ist, gilt außerdem $z_0 \in \mathbb{C}$.

Weil f nach Voraussetzung stetig ist, ist es insbesondere im Punkt z stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$, dass folgendes erfüllt:

$$(**) \qquad \forall z \in M : \quad (|z - z_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Da $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen z_0 konvergiert, gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$ die Ungleichung $|z_{n_k} - z_0| < \frac{\delta}{2}$ gilt. Wir wählen nun ein $k \in \mathbb{N}$, welches $k \geq k_0$ und $\frac{1}{k} < \frac{\delta}{2}$ erfüllt; ein solches k gibt es wegen Proposition 1.2.10(a) (die wir aus dem Archimedischen Axiom 1.2.9 gefolgert hatten). Somit gilt insgesamt

$$|z_{n_k} - z_0| < \frac{\delta}{2} < \delta \quad \text{und} \quad |w_{n_k} - z_0| \leq \underbrace{|w_{n_k} - z_{n_k}|}_{<\frac{1}{n_k}<\frac{1}{k}<\frac{\delta}{2}} + \underbrace{|z_{n_k} - z_0|}_{<\frac{\delta}{2}} < \delta.$$

Wegen $(**)$ gilt somit $|f(z_{n_k}) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|f(w_{n_k}) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Aus der Dreiecksungleichung folgt somit

$$|f(z_{n_k}) - f(w_{n_k})| < \varepsilon,$$

was der rechtsstehenden Ungleichung in $(*)$ widerspricht. □

3.4 Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior

In den Beweisen der Theoreme 3.3.5 und 3.3.8 haben Sie bereits folgendes gesehen: Wenn man nicht weiß, ob eine Folge konvergiert, kann es nützlich sein eine konvergente Teilfolge anzusehen. Für die Grenzwerte der konvergenten Teilfolgen einer Folge führt man einen eigenen Namen ein:

Definition 3.4.1 (Häufungspunkte)**.** Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Ein $z \in \mathbb{C}$ bezeichnet man als einen **Häufungspunkt** von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die gegen z konvergiert.

Beispiele 3.4.2 (Häufungspunkte einiger Folgen)**.**

(a) Eine konvergente Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{C}}$ besitzt genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert.[8] Das folgt aus Proposition 3.2.3.

(b) Die Folge $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt genau zwei Häufungspunkte, nämlich -1 und 1.

Proposition 3.4.3 (Die Menge der Häufungspunkte einer Folge ist abgeschlossen)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann ist die Menge*

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \; z \textit{ ist eine Häufungspunkt von } (z_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$$

abgeschlossen.

Beweis. Wir verzichten an dieser Stelle auf den Beweis. Er ist nicht wahnsinnig schwer, aber er ist intuitiver, wenn man bereits mehr über abgeschlossene Mengen weiß – und darauf werden wir in der Analysis 2 in allgemeinerem Rahmen ohnehin nochmal zurückkommen. □

Proposition 3.4.4 (Maximum und Minimum abgeschlossener Mengen)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und abgeschlossen.*

(a) *Falls M nach oben beschränkt ist, besitzt M ein Maximum.*

(b) *Falls M nach unten beschränkt ist, besitzt M ein Minimum.*

Beweis. (a) Da M nichtleer und nach oben beschränkt ist, besitzt M aufgrund der Ordnungsvollständigkeit von $\mathbb{R}$ (Axiom 1.2.14) ein Supremum. Laut Proposition 3.1.9(a) gibt es eine Folge $(z_n)_{n\in M}$ in M, die gegen $\sup M$ konvergiert. Da M abgeschlossen ist, folgt aus der Definition von Abgeschlossenheit, dass $\sup M \in M$ ist. Also ist $\sup M$ eine obere Schranke von M, die in M liegt, das heißt, $\sup M$ ist das Maximum von M.

(b) Der Beweis ist analog zum Beweis von (a). □

Vorlesung 13 (Mi, 27.11.) beginnt nach dem Beweis von Proposition 3.4.4

Lassen Sie uns eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ betrachten, die mindestens ein Häufungspunkt besitzt und nach oben beschränkt ist. Also liegt sie in einem Intervall der Form $(-\infty, b]$ für ein $b \in \mathbb{R}$ liegt und somit liegen wegen der Abgeschlossenheit von $(-\infty, b]$ (Beispiel 3.3.3(a)) auch alle Häufungspunkte der Folge in $(-\infty, b]$. Also ist die Menge der Häufungspunkte nichtleer, nach oben beschränkt und laut Proposition 3.4.3 abgeschlossen. Damit hat die Folge wegen Proposition 3.4.4(a) einen größten Häufungspunkt. Analog kann man sehen, dass die Folge einen kleinsten Häufungspunkt besitzt, falls sie mindestens einen Häufungspunkt besitzt und nach unten beschränkt ist. Aufgrund dieser Beobachtungen ergibt die nächste Definition Sinn.

[8] In einer Aufgabe auf Hausaufgabenblatt 7 werden Sie sogar zeigen, dass eine beschränkte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn Sie nur einen Häufungspunkt besitzt.

Definition 3.4.5 (Limes superior und Limes inferior)**.** Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Falls die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach oben beschränkt ist, so definiert man ihren **Limes superior** als ∞.

Falls die Folge nach oben beschränkt ist und einen Häufungspunkt besitzt, dann definiert man ihren **Limes superior** als ihren größten Häufungspunkt.

Falls die Folge nach oben beschränkt ist und keinen Häufungspunkt besitzt, definiert man ihren **Limes superior** als $-\infty$.

Man notiert den Limes superior von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\limsup_{n\to\infty} z_n \qquad \text{oder als} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, z_n.$$

(b) Falls die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht nach unten beschränkt ist, so definiert man ihren **Limes inferior** als $-\infty$.

Falls die Folge nach unten beschränkt ist und einen Häufungspunkt besitzt, dann definiert man ihren **Limes inferior** als ihren kleinsten Häufungspunkt.

Falls die Folge nach unten beschränkt ist und keinen Häufungspunkt besitzt, definiert man ihren **Limes inferior** als ∞.

Man notiert den Limes inferior von $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als

$$\liminf_{n\to\infty} z_n \qquad \text{oder als} \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, z_n.$$

Beispiele 3.4.6 (Einige Beispiele für Limes superior und Limes inferior)**.**

(a) Wenn $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in $\mathbb{R}$ ist, dann gilt $\limsup_{n\to\infty} z_n = \liminf_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} z_n$.

(b) Es gilt $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n = 1$ und $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n = -1$.

(c) Es gilt $\limsup_{n\to\infty} n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} n = \infty$.

(d) Es gilt $\limsup_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty}(-1)^n n = -\infty$.

3.5 Cauchy-Folgen und Unendliche Reihen

Ein wesentliches Problem bei der Definition von konvergenten Folgen ist, dass man für eine gegebene Folge nur dann überprüfen kann, ob die Definition erfüllt ist, wenn man bereits einen Kandidaten für den Grenzwert kennt. Dieses Problem kann man manchmal mit Hilfe des folgenden Konzeptes und des darauf folgenden Satzes umgehen.

Definition 3.5.1 (Cauchy-Folgen)**.** Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{C}}$ heißt **Cauchy-Folge**, falls sie die folgende Eigenschaft erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}: \quad (n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_{n_0}| < \varepsilon)$$

Proposition 3.5.2 (Äquivalente Beschreibung von Cauchy-Folgen)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchy-Folge, wenn sie die folgende Eigenschaft erfüllt:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \in \mathbb{N}: \quad (m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad |z_n - z_m| < \varepsilon)$$

Beweis. Den Beweis führen wir in den Übungen. □

Theorem 3.5.3 (Cauchy-Folgen sind genau die konvergenten Folgen)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Nehmen wir an, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Wir setzen $z := \lim_{n\to\infty} z_n$. Um zu zeigen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist, betrachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Wegen $z_n \to z$ für $n \to \infty$ gibt es ein $n_0 \geq 0$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$. Dann ist

$$|z_n - z_{n_0}| \leq |z_n - z| + |z - z_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Cauchy-Folge.

"$\Leftarrow$" Nehme wir an, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Zunächst überlegt man sich, dass die Folge somit beschränkt ist. Das kann man genauso zeigen, wie die Beschränktheit von konvergenten Folgen in Aufgabe 3(a) auf Hausaufgabenblatt 6. Also gibt es ein $d > 0$ derart, dass $|z_n| \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Da die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, besitzt sie laut Korollar 3.2.5 (Bolzano–Weierstraß in $\mathbb{C}$) eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$; wir setzen $z := \lim_{k\to\infty} z_{n_k}$. Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass sogar die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selbst gegen z konvergiert. Dazu betrachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$.

Wegen $z_{n_k} \to z$ für $k \to \infty$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:

$$(*) \qquad \forall k \in \mathbb{N}: \quad (k \geq k_0 \ \Rightarrow\ |z_{n_k} - z| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es laut Proposition 3.5.2 außerdem ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit folgender Eigenschaft:

$$(**) \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}: \quad (m, n \geq n_0 \ \Rightarrow\ |z_n - z_m| < \frac{\varepsilon}{2})$$

Wir wählen nun ein $k_1 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_1 \geq k_0$ und $n_{k_1} \geq n_0$ gilt, und wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_{k_1}$ die Ungleichung $|z_n - z| < \varepsilon$ gilt. Dazu betrachten wir ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_{k_1}$. Dann gilt

$$|z_n - z| \leq \left|z_n - z_{n_{k_1}}\right| + \left|z_{n_{k_1}} - z\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

wobei wir für die letzte Ungleichung verwenden haben, dass wegen $n \geq n_{n_{k_1}} \geq n_0$ und $(**)$ die Ungleichung $\left|z_n - z_{n_{k_1}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt und dass wegen $k_1 \geq k_0$ und $(*)$ die Ungleichung $\left|z_{n_{k_1}} - z\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. □

Mit Hilfe von Cauchyfolgen kann man das folgende Konzept sehr gut untersuchen: **Vorlesung 14** (Fr, 29.11.) beginnt mit Definition 3.5.4

Definition 3.5.4 (Reihen)**.** Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Dann nennt man die Folge

$$\big(z_1, z_1+z_2, z_1+z_2+z_3, z_1+z_2+z_3+z_4, \dots\big) = \Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

die **Reihe** über $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ebenso nennt man für eine Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge

$$\big(z_0, z_0+z_1, z_0+z_1+z_2, z_0+z_1+z_2+z_3, \dots\big) = \Big(\sum_{k=0}^{n} z_k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

die **Reihe** über $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Die Summen $\sum_{k=1}^{n} z_k = z_1 + \dots + z_n$ beziehungsweise $\sum_{k=0}^{n} z_k = z_0 + \dots + z_n$ für $n \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $n \in \mathbb{N}_0$ nennt man die **Partialsummen** der Reihe.

Man kann natürlich ebenso gut auch Reihen betrachten, deren untere Summationsgrenze eine andere Zahl als 0 oder 1 ist. Im folgenden werden wir häufig (aber nicht ausschließlich) Reihen betrachten, deren untere Summationsgrenze gleich 0 ist. Das erweist sich später an vielen Stellen als nützlich.

Definition 3.5.5 (Konvergenz von Reihen)**.** Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge ein $\mathbb{C}$.

(a) Da die Reihe $\Big(\sum_{k=0}^{n} z_k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge ist, ist durch Definition 3.1.2 bereits festgelegt, wann sie konvergiert and wann sie divergiert. Falls sie konvergiert, bezeichnet man Ihren Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z_k$ üblicherweise mit dem Symbol

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k.$$

(b) Die Reihe $\Big(\sum_{k=0}^{n} z_k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bezeichnet man als *absolut konvergent*, falls die Reihe $\Big(\sum_{k=0}^{n} |z_k|\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

(c) Sei nun $z_n \in [0,\infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Folge $\Big(\sum_{k=0}^{n} z_k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton steigend und somit entweder konvergent gegen eine reelle Zahl oder bestimmt divergent gegen ∞. Im ersten Fall schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k < \infty$$

und im zweiten Fall schreibt man

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \infty.$$

Beispiele 3.5.6 (Einige Beispiel für konvergente Reihen)**.**

(a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

Insbesondere gilt somit

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

(b) Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Beweis. (a) Laut Aufgabe 1(c) auf Hausaufgabenblatt 7 gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Laut Aufgabe 1(e) auf demselben Blatt gilt $z^{n+1} \to 0$ für $n \to \infty$, also ist

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \to \frac{1}{1-z}$$

für $n \to \infty$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.5.7 (Notwendiges Kriterium für Reihenkonvergenz)**.** *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wenn die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, dann gilt $z_k \to 0$ für $k \to \infty$.*

Beweis. Berachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Weil die Reihe $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, ist sie eine konvergente Folge und somit laut Theorem 3.5.3 eine Cauchy-Folge. Aufgrund der Charakterisierung von Cauchy-Folgen in Proposition 3.5.2 gibt es somit ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, das folgendes erfüllt:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 : \quad (m, n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{m} z_k\right| < \varepsilon)$$

Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq n_0 + 1$. Dann ist $n \geq n_0$ und $n - 1 \geq n_0$ und somit gilt

$$|z_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{n-1} z_k\right| < \varepsilon,$$

womit $z_n \to 0$ für $n \to \infty$ gezeigt ist. □

Beispiel 3.5.8 (Eine divergente Reihe)**.** Die Reihe $\left(\sum_{N=0}^{\infty}(-1)^n\right)_{N\in\mathbb{N}_0}$ ist divergent.

Das folgt aus dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz in Proposition 3.5.7, da $(-1)^n \not\to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

Das notwendige Kriterium in Proposition 3.5.7 ist nicht hinreichend für Reihenkonvergenz! Das folgende Beispiel ist ein sehr berühmtes Gegenbeispiel hierfür:

Beispiel 3.5.9 (Die harmonische Reihe ist divergent)**.** Es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist. Dazu betrachten wir eine beliebiges, feste Zahl $C \in \mathbb{R}$ und zeigen nun, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq C$ gibt. Dazu gehen wir folgendermaßen vor:

Wegen des Archimedischen Axioms 1.2.9 gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $N \geq 2C$. Wir machen nun folgende Beobachtung:

- Der erste Summand der Reihe ist gleich 1 und erfüllt insbesondere $1 \geq \frac{1}{2}$.
- Die Summe der nächste beiden Summanden erfüllt
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$
- Die Summe der nächsten vier Summanden erfüllt
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$
- Die Summe der nächsten acht Summanden erfüllt
$$\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{15} \geq \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} = \frac{1}{2}.$$

- Und so weiter...

Wenn wir hiervon insgesamt N Schritte machen, dann haben wir uns die ersten $1+2+4+8+\cdots+2^{N-1} = \frac{2^N-1}{2-1} = 2^N - 1$ Summanden der Reihe angesehen und ihre Summe erfüllt somit

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} \frac{1}{k} \geq \frac{N}{2} \geq C.$$

Also gilt tatsächlich $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq C$, wenn wir $n = 2^N - 1$ wählen. □

Theorem 3.5.10 (Absolut konvergente Reihen sind konvergent)**.** *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. Wenn die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n z_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ absolut konvergiert, dann konvergiert sie.*

Beweis. Nehmen wir an, dass die Reihe absolut konvergiert. Dann ist $\left(\sum_{k=0}^n |z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent und somit laut Theorem 3.5.3 eine Cauchy-Folge. Wir zeigen nun, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n z_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ebenfalls eine Cauchy-Folge ist. Dann ist ist laut Theorem 3.5.3 konvergent und somit die Behauptung gezeigt.

Betrachten wir also ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Da $\left(\sum_{k=0}^n |z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\sum_{k=n_0+1}^{n} |z_k| = \left| \sum_{k=0}^{n} |z_k| - \sum_{k=0}^{n_0} |z_k| \right| < \varepsilon$$

gilt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt auch

$$\left| \sum_{k=0}^{n} z_k - \sum_{k=0}^{n_0} z_k \right| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{n} z_k \right| \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} |z_k| < \varepsilon.$$

Also ist $\left(\sum_{k=0}^n z_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie behauptet eine Cauchy-Folge. □

Vorlesung 15 (Mi, 04.12.) beginnt mit Theorem 3.5.11

Theorem 3.5.11 (Hinreichende Kriterien für absolute Konvergenz von Reihen)**.** *Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$.*

(a) *Wenn es ein $C \geq 0$ gibt derart, dass $\sum_{k=0}^n |z_k| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dann ist die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent und somit konvergent.*

(b) ***Vergleichskriterium:***

Sei $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[0,\infty)$ und gelte $|z_k| \leq b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wenn die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n b_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert,[9] dann ist auch die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergent und somit konvergent.

[9]Und somit absolute konvergiert, da $|b_k| = b_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(c) ***Wurzelkriterium:***

Falls $\limsup_{k\to\infty} |z_k|^{\frac{1}{k}} < 1$ *gilt, dann ist die Reihe* $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *absolut konvergent und somit konvergent.*

(d) ***Quotientenkriterium:***

Falls $z_k \neq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}_0$ *ist und* $\limsup_{k\to\infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < 1$ *gilt, dann ist die Reihe* $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *absolut konvergent und somit konvergent.*

Beweis. (a) Wegen $|z_k| \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} |z_k|\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton steigend. Außerdem ist sie nach Voraussetzung beschränkt. Somit konvergiert die Folge laut Proposition 3.1.8(a).

(b) Wir setzen $C := \sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$. Weil die Folge $\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend ist, ist ihr Grenzwert C laut Proposition 3.1.8(a) gleich dem Supremum von $\left\{ \sum_{k=0}^{n} b_k \mid n \in \mathbb{N}_0 \right\}$. Somit gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{n} |z_k| \leq \sum_{k=0}^{n} b_k \leq C,$$

also ist $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ laut (a) absolut konvergent.

(c) Wir setzen $q := \limsup_{k\to\infty} |z_k|^{\frac{1}{k}}$ und nehmen an, dass $q < 1$ gilt. Dann gibt es eine relle Zahl r mit der Eigenschaft $q < r < 1$. Da der Limes superior der Folge $\left(|z_k|^{\frac{1}{k}}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine reelle Zahl ist, ist die Folge aufgrund der Definition des Limes superior beschränkt. Wären würden unendlich viele Glieder der Folge in $[r, \infty)$ liegen, dann hätte die Folge wegen des Satzes von Bolzano–Weierstraß und der Abgeschlossenheit von $[r, \infty)$ einen Häufungspunkt in $[r, \infty)$, was aber im Widerspruch zu $q < r$ steht.

Also liegen höchstens endlich viele Glieder dieser Folge in $[r, \infty)$, das heißt, es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $|z_k|^{\frac{1}{k}} < r$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Somit ist $|z_k| \leq r^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq k_0$. Weil es für k_0 nur endlich viele Zahlen in $\mathbb{N}_0$ gibt, gibt es eine Zahl $C \geq 1$ mit der Eigenschaft $|z_k| \leq Cr^k$ für alle $k \in \{0, \ldots, k_0 - 1\}$. Also gilt ingesamt $|z_k| \leq Cr^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Laut Beispiel 3.5.6(a) konvergiert die Reihe $\left(C \sum_{k=0}^{n} r^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^{n} Cr^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, also folgt aus dem Vergleichskriterium im bereits bewiesenen Teil (b) des aktuellen Theorems, dass $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ absolut konvergiert.

(d) Wir nehmen an, dass $z_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und $\limsup_{k\to\infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} < \infty$ gilt. Wie im Beweis von (c) sieht man, dass es somit eine reelle Zahl $r \in (0, 1)$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt derart, dass $\frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} \leq r$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq k_0$ gilt. Für jedes solche k ist damit

$$\frac{|z_k|}{|z_{k_0}|} = \frac{|z_k|}{|z_{k-1}|} \cdot \frac{|z_{k-1}|}{|z_{k-2}|} \cdot \frac{|z_{k-2}|}{|z_{k-3}|} \cdots \frac{|z_{k_0+1}|}{|z_{k_0}|} \leq r^{k-k_0}$$

und somit

$$|z_k|^{\frac{1}{k}} \leq \left(|z_{k_0}|\, r^{-k_0}\right)^{\frac{1}{k}} r.$$

Aus Aufgaben 1(b) und (c) auf Hausaufgabenblatt 8 sowie Aufgabe 1(a) auf Hausaufgabenblatt 7 kann man für jedes $a \in (0, \infty)$ die Eigenschaft $a^{\frac{1}{k}} \to 1$ für $k \to \infty$ folgern; somit konvergiert die rechte Seite der vorangehenden Ungleichung für $k \to \infty$ gegen r konvergiert. Damit folgt wegen Aufgabe 1(a) auf Hausaufgabenblatt 7, dass $\limsup_{k\to\infty} |z_k|^{\frac{1}{k}} \leq r < 1$ ist und somit ist $\left(\sum_{k=0}^{n} z_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ laut des Wurzelkriteriums in Teil (c) des aktuellen Theorems absolut konvergent. □

Beispiel 3.5.12 (Die Eulersche Reihe)**.** Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$, das heißt, die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Beweis. Wegen Beispiel 3.5.6(b) ist die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Weil für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $k(k+1) = k^2 + k \leq 2k^2$ und somit $\frac{1}{k^2} \leq \frac{2}{k(k+1)}$ gilt, ist laut Vergleichskriterium (Theorem 3.5.11(b)) auch die Reihe $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (absolut) konvergent. □

Beispiel 3.5.13 (Anwendung des Wurzel- und des Quotientenkriteriums)**.** Die Reihe

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

ist (absolut) konvergent.

Beweis mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Laut Aufgabe 1(b) auf Hausaufgabenblatt 8 gilt $k^{\frac{1}{k}} \to 1$ für $k \to \infty$ und somit folgt

$$\left(\frac{k}{2^k}\right)^{\frac{1}{k}} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } k \to \infty.$$

Also ist

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k}{2^k}\right)^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2} < 1$$

und somit folgt die Behauptung aus dem Wurzelkriterium. □

Beweis mit Hilfe des Quotientenkriteriums. Es ist

$$\frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \quad \text{für } k \to \infty$$

und somit

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{2^{k+1}}}{\frac{k}{2^k}} = \frac{1}{2} < \infty.$$

Also folgt die Behauptung aus dem Quotientenkriterium. □

Kapitel 4

Funktionenfolgen und -reihen

4.1 Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und bezeichne $\mathbb{C}^M$ die Menge aller Funktionen $M \to \mathbb{C}$. Den Begriff **Folge** hatten wir in Definition 3.1.1 nicht nur für Folgen von reellen oder komplexen Zahlen sondern auch für Folgen von Elementen einer beliebigen Menge eingeführt. Somit können wir auch von Folgen in $\mathbb{C}^M$ sprechen – das heißt, von Folgen, deren Glieder Funktionen sind. Solche Folgen nennt man **Funktionenfolgen**. Lassen Sie uns nun über Konvergenz von Funktionenfolgen sprechen.

Definition 4.1.1 (Punktweise Konvergenz von Funktionenfolgen)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen von M nach $\mathbb{C}$. Sei außerdem $f\colon M \to \mathbb{C}$. Man sagt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **punktweise gegen** f **konvergiert** und notiert dies als

$$f_n \to f \quad \text{punktweise für } n \to \infty,$$

falls für jedes $z \in M$ die Eigenschaft $f_n(z) \to f(z)$ für $n \to \infty$ gilt.

Man nennt f dann auch den **punktweisen Grenzwert** oder **punktweisen Limes** von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass der punktweise Grenzwert von Funktionenfolgen sich im Allgemeinen nicht gut bezüglich des Konzepts Stetigkeit verhält.

Beispiel 4.1.2 (Der punktweise Grenzwert stetiger Funktionen muss nicht stetig sein)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z^n$. Außerdem sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(z) = 0$ für $z \in [0,1)$ und $f(1) = 1$. Dann gilt

$$f_n \to f \quad \text{punktweise für } n \to \infty.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion f_n stetig, aber der punktweise Grenzwert f ist unstetig im Punkt 1.

Um für eine Folge stetiger Funktionen die Stetigkeit des Grenzwerts sicherzustellen, führt man die folgenden stärkeren Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen ein:

Definition 4.1.3 (Gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz). Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $M \to \mathbb{C}$.

(a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **gleichmäßig konvergent gegen** f, falls

$$\sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in M\} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt.

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **gleichmäßig konvergent**, falls es eine Funktion $M \to \mathbb{C}$ gibt, gegen die die Folge gleichmäßig konvergiert.

Vorlesung 16 (Fr, 06.12.) beginnt mit Definition 4.1.3(b)

(b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **lokal gleichmäßig konvergent gegen** f, falls es für jedes $z_0 \in M$ ein $r > 0$ gibt derart, dass $\big(f_n|_{B_{<r}(z_0)\cap M}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $f|_{B_{<r}(z_0)\cap M}$ konvergiert.

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **lokal gleichmäßig konvergent**, falls es eine Funktion $M \to \mathbb{C}$ gibt, gegen die die Folge lokal gleichmäßig konvergiert.

Aus dieser Definition folgt folgender Zusammenhang zwischen den verschiedenen Konvergenzarten von Funktionen:

$$\begin{gathered}\text{gleichmäßige Konvergenz}\\ \Downarrow\\ \text{lokal gleichmäßige Konvergenz}\\ \Downarrow\\ \text{punktweise Konvergenz}\end{gathered}$$

Beispiel 4.1.4 (Gleichmäßige vs. lokal gleichmäßige Konvergenz). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon [0,1) \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z^n$. Dann gilt $f_n \to 0$ für $n \to \infty$ punktweise, aber nicht gleichmäßig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$\sup\{|f_n(z) - 0| \mid z \in [0,1)\} = \sup\{z^n \mid z \in [0,1)\} = 1.$$

Allerdings gilt $f_n \to 0$ lokal gleichmäßig. Um das zu sehen betrachten wir ein beliebiges, festes $z_0 \in [0,1)$. Wähle $r > 0$ so klein, dass $z_0 + r < 1$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}&\sup\{\big|f_n|_{B_{<r}(z_0)\cap[0,1)} - 0\big| \mid z \in B_{<r}(z_0) \cap [0,1)\}\\ &= \sup\{z^n \mid z \in [0,1) \cap (z_0 - r, z_0 + r)\} \leq (z_0 + r)^n \to 0\end{aligned}$$

für $n \to \infty$.

Definition 4.1.5 (Supremums-Norm). Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f : M \to \mathbb{C}$. Dann nennt man

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(z)| \mid z \in M\} \in [0,\infty] := [0,\infty) \cup \{\infty\}$$

die **Supremums-Norm** von f.[1,2]

[1] Genau genommen verwendet man diesen Begriff vor allem dann, wenn $\|f\|_{\sup} < \infty$ gilt.

[2] Es gibt noch viele weitere **Normen**. Was genau dieser Begriff bedeutet und wozu er nützlich ist, werden Sie in der Analysis 2 lernen.

Proposition 4.1.6 (Gleichmäßige Konvergenz mit der Supremums-Norm ausgedrückt). *Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$, sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $M \to \mathbb{C}$.*

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen f, wenn $\|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ für $n \to \infty$ gilt.

Beweis. Das folgt sofort aus der Definition von gleichmäßiger Konvergenz. □

Das Praktische an gleichmäßiger Konvergenz – und allgemeiner an lokal gleichmäßiger Konvergenz – ist, dass sich Stetigkeit auf den Grenzwert überträgt. Das ist der Inhalt des folgenden Satzes:

Theorem 4.1.7 (Stetigkeit des Grenzwerts bei lokal gleichmäßiger Konvergenz). *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$, sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $M \to \mathbb{C}$, die lokal gleichmäßig gegen f konvergiert. Wenn alle Funktionen f_n stetig sind, dann ist auch f stetig.*

Aus Zeitgründen verzichten wir in der Vorlesung deshalb auf den Beweis. Bei Interesse können Sie ihn in Addendum 4.4 nachlesen.

4.2 Reihen von Funktionen und Potenzreihen

Vorlesung 17 (Mi, 11.12.) beginnt mit Definition 4.2.1

So wie wir in Definition 3.5.4 Reihen über komplexe Zahlen eingeführt haben, können wir jetzt auch Reihen über Funktionen definieren:

Definition 4.2.1 (Funktionenreihen). Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von Funktionen $M \to \mathbb{C}$. Dann nennt man die Funktionenfolge

$$\big(f_0, f_0 + f_1, f_0 + f_1 + f_2, f_0 + f_1 + f_2 + f_3, \dots\big) = \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k\Big)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

die **Reihe** über $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$.

Wie im Fall von komplexen oder reellen Zahlen ist also eine Funktionenreihe eine Folge, deren Glieder Partialsummen sind, und somit sind punktweise, gleichmäßige und lokal gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen bereits definiert.[3]

Beispiel 4.2.2 ($\boldsymbol{1/(1-z)}$ als Potenzreihe). Sei $f\colon B_{<1}(0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \frac{1}{1-z}$, und für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ sei $f_k\colon B_{<1}(0) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^k$. Dann konvergiert $\big(\sum_{k=0}^{n} f_k\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ lokal gleichmäßig gegen f.

Beweis. Sei $z_0 \in B_{<1}(0)$ beliebig, fest. Wähle einen Radius $r > 0$ derart, dass die offene Kreisscheibe um z_0 mit Radius r komplett in $B_{<1}(0)$ liegt und dessen Rand nicht berührt, also derart, dass $r + |z_0| < 1$ gilt (um etwas konkreter zu werden, könnte man zum Beispiel $r := \frac{1-|z|}{2}$ wählen).

[3] Da wir sie bereits für alle Funktionenfolgen definiert haben.

Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ und jedes $z \in B_{<r}(z_0)$ gilt

$$\left|z^k\right| = |z|^k \le \big(|z - z_0| + |z_0|\big)^k \le (r + |z_0|)^k.$$

Somit gilt für jedes $z \in B_{<r}(z_0)$ und jedes $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(z) - f(z)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} z^k\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{m} z^k\right| \\
&= \lim_{m\to\infty} \left| - \sum_{k=n+1}^{m} z^k\right| \le \limsup_{m\to\infty} \sum_{k=n+1}^{m} |z|^k \\
&\le \limsup_{m\to\infty} |z|^{n+1} \sum_{k=0}^{m-(n+1)} |z|^k \\
&= |z|^{n+1} \frac{1}{1 - |z|} \le (r + |z_0|)^{n+1} \frac{1}{1 - (r + |z_0|)}.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\left\|\sum_{k=0}^{n} f_k - f\right\|_{\sup} \le (r + |z_0|)^{n+1} \frac{1}{1 - (r + |z_0|)} \to 0$$

für $n \to \infty$. □

Theorem 4.2.3 (Konvergenz und Stetigkeit von Potenzreihen)**.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\ell := \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} < \infty$. Wir setzen*

$$r := \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \textit{falls } \ell > 0, \\ \infty & \textit{falls } \ell = 0. \end{cases}$$

(a) *Sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\big(\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert absolut, falls $|z - z_0| < r$ ist und sie divergiert, falls $|z - z_0| > r$ ist.*

(b) *Die Funktion*[4]

$$B_{<r}(z_0) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

ist der lokal gleichmäßige Grenzwert der Funktionen

$$B_{<r}(z_0) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(z - z_0)^k$$

für $n \to \infty$ und ist somit stetig.

[4] Hier verwenden wir die Konvention $B_{<\infty}(z_0) := \mathbb{C}$.

Beweis. (a) Wir nehmen zunächst an, dass $|z-z_0| < r$ ist. Dann gilt $\ell\,|z-z_0| < 1$; falls $\ell = 0$ ist, ist das offensichtlich, und falls $\ell > 0$ ist, folgt es aus $\ell\,|z-z_0| = \frac{|z-z_0|}{r} < 1$. Somit folgt

$$\limsup_{k\to\infty} \left|a_k(z-z_0)^k\right|^{\frac{1}{k}} \le \limsup_{k\to\infty} \left(|a_k|^{\frac{1}{k}}\,|z-z_0| \right) = \ell\,|z-z_0| < 1.$$

Aus dem Wurzelkriterium (Theorem 3.5.11(c)) folgt somit die behauptete absolute Konvergenz.

Nun nehmen wir an, dass $|z-z_0| > r$ ist. Dann ist $r < \infty$ und somit $\ell > 0$ und $\ell r = 1$ Somit erhält man

$$\limsup_{k\to\infty} \left|a_k(z-z_0)^k\right|^{\frac{1}{k}} = \ell\,|z-z_0| > \ell r = 1.$$

Somit findet man Indizes $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ derart, dass $\left|a_{k_j}(z-z_0)^{k_j}\right|^{\frac{1}{k_j}} \ge 1$ und folglich $\left|a_{k_j}(z-z_0)^{k_j}\right| \ge 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere ist also $\left|a_k(z-z_0)^k\right| \not\to 0$ für $k \to \infty$ und somit folgt aus dem notwendigen Kriterium für Reihenkonvergenz in Proposition 3.5.7, dass die Reihe $\left(\sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht konvergiert.

(b) Die lokal gleichmäßige Konvergenz kann man zeigen, in dem man ein Lokalisierungsargument wie in Beispiel 4.2.2 mit Argument aus dem Beweis von (a) kombiniert; wir verzichten an dieser Stelle auf die Details. Die Stetigkeit der Grenzfunktion folgt dann aus Theorem 4.1.7. □

Definition 4.2.4 (Potenzreihe)**.** In der Situation von Theorem 4.2.3 nennt man die Folge der Funktionen der Funktionen

$$B_{<r}(z_0) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \sum_{k=0}^n a_k(z-z_0)^k$$

eine **Potenzreihe** und die Zahl r ihren **Konvergenzradius**.

4.3 Die Exponentialfunktion

Proposition 4.3.1 (Konvergenzradius der Exponentialfunktion)**.** *Es gilt*

$$\left(\frac{1}{n!}\right)^{1/n} \to 0$$

für $n \to \infty$.

Beweis. Das ist eine sehr schöne Übungsaufgabe, deshalb lagern wir den Beweis in die Übungen aus. □

Aufgrund von Proposition 4.3.1 ist der Konvergenzradius der Funktionenreihe in der folgenden Definition gleich ∞.

Definition 4.3.2 (Die Exponentialfunktion)**.** Für jedes $z \in \mathbb{C}$ definiert man

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Man nennt die Abbildung

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto \exp(z)$$

die **Exponentialfunktion**.

Proposition 4.3.3 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.**

(a) *Die Funkion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist stetig.*

(b) *Für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt die sogenannte* ***Funktionalgleichung*** *der Exponentialfunktion:*

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Beweis. (a) Das folgt aus Theorem (b).

(b) Einen Beweis dieser Eigenschaft geben wir im nächsten Kapitel an, wenn wir Methoden der Differentialrechnung zur Verfügung haben. □

4.4 Addendum: Beweis von Theorem 4.1.7

In diesem Addendum beweisen wir Theorem 4.1.7. Hierfür ist die folgenden Beobachtung nützlich:

Lemma 4.4.1 (Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft)**.** *Sei* $z_0 \in M \subseteq \mathbb{C}$ *und sei* $f\colon M \to \mathbb{C}$. *Wenn es eine reelle Zahl* $r > 0$ *gibt derart, dass* $f|_{B_{<r}(z_0)\cap M}$ *stetig in* z_0 *ist, dann ist* f *stetig in* z_0.

Beweis. Sie $r > 0$ so, wie im Lemma angegeben. Betrachten wir ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Weil $f|_{B_{<r}(z_0)\cap M}$ stetig in z_0 ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $z \in B_{<r}(z_0) \cap M$ folgende Implikation gilt:

$$(*) \qquad |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

Wir setzen nun $\hat{\delta} := \min\{r, \delta\}$. Betrachten wir ein beliebiges, festes $z \in M$ mit $|z - z_0| < \hat{\delta}$. Dann gilt inbesondere $|z - z_0| < r$, also $z \in B_{<r}(z_0) \cap M$. Weil zugleich auch $|z - z_0| < \hat{\delta} \leq \delta$ ist, folgt aus $(*)$ die Ungleichung $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. □

Beweis von Theorem 4.1.7. Wir zeigen die Behauptung unter der stärkeren Annahme, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Im Falle, dass die Konvergenz nur lokal gleichmäßig ist, folgt die Behauptung dann aus Lemma 4.4.1. Sei also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent gegen f.

Um die Stetigkeit von f zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges, festes $z_0 \in M$ und ein beliebiges, festes $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ die Ungleichung

$$\alpha_n := \sup\{|f_n(z) - f(z)| \mid z \in M\} < \frac{\varepsilon}{3}$$

gilt. Da f_{n_0} laut Voraussetzung stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $z \in M$ die folgende Implikation gilt:

$$(*) \qquad |z - z_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Betrachten wir nun ein beliebiges, festes $z \in M$ mit $|z - z_0| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \big|\big(f(z) - f_{n_0}(z)\big) + \big(f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)\big) + \big(f_{n_0}(z_0) - f(z_0)\big)\big| \\ &\leq |f(z) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + |f_{n_0}(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq \alpha_{n_0} + |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(z_0)| + \alpha_{n_0} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist f stetig in z_0. Da $z_0 \in M$ beliebig war, ist f also stetig. □

Kapitel 5

Differentialrechnung

5.1 Änderungsraten und Ableitungen

Definition auch über $\mathbb{C}$ – aber keine funktionentheoretischen Argumente verwenden und keine funktionentheoretischen Aussagen zeigen.

Definition 5.1.1 (Isolierte Punkte)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $z \in M$. Man nennt z **isoliert in *M*** oder einen **isolierten Punkt von *M***, falls es keine Folge in $M \setminus \{z\}$ gibt, die gegen z konvergiert.

Man kann sich überlegt, dass ein Element z einer Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ genau dann isoliert in M ist, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $M \cap B_{<\varepsilon}(z) = \{z\}$ gilt.[1]

Vorlesung 18 (Fr, 13.12.) beginnt mit Definition 5.1.2

Definition 5.1.2 (Differenzierbarkeit und Ableitung)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $f\colon M \to \mathbb{R}$.

(a) Sei $z \in M$ nicht isoliert in M. Wir sagen, dass f **differenzierbar in *z*** ist, falls es ein $a \in \mathbb{C}$ gibt derart, dass

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} \to a \quad \text{für } w \to z$$

gilt. Hierbei ist die Konvergenz so zu verstehen, dass für jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M \setminus \{z\}$ mit $w_n \to z$ für $n \to \infty$ die Eigenschaft

$$\frac{f(w_n) - f(z)}{w_n - z} \to a \quad \text{für } n \to \infty$$

gilt.

In diesem Fall nennt man a die **Ableitung** von f im Punkt z und schreibt $f'(z) := a$.[2]

[1] Können Sie das im Detail begründen?

[2] Das ergibt nur dann Sinn, wenn man weiß, dass a eindeutig bestimmt ist. Woher wissen wir, dass a eindeutig bestimmt ist?

(b) Sei kein Element von M isoliert in M. Wir nennen f **differenzierbar**, falls f in jedem Punkt $z \in M$ differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$f' \colon M \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto f'(z)$$

die **Ableitung** von f. Manchmal schreibt man für $z \in M$ anstelle von $f'(z)$ auch $\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}$.

Beispiele 5.1.3 (Einige (nicht-)differenzierbare Funktionen)**.**

(a) Sei $b \in \mathbb{C}$. Dann ist die konstante Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto b$ differenzierbar und es gilt $f'(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Allgemeiner gilt für alle $b, c \in \mathbb{C}$: Die Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto cz + b$ ist differenzierbar und es gilt $f'(z) = c$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(c) Die Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ ist differenzierbar und es gilt $f'(z) = 2z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(d) Die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |z|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar.

Beweis. (a) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{b - b}{w - z} = 0 \to 0 \quad \text{für } w \to z.$$

(b) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{(cw + b) - (cz + b)}{w - z} = \frac{c(w - z)}{w - z} = c \to c \quad \text{für } w \to z.$$

(c) Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt für $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = \frac{w^2 - z^2}{w - z} = \frac{(w + z)(w - z)}{w - z} = w + z \to 2z \quad \text{für } w \to z,$$

wobei die Konvergenzaussage $w + z \to 2z$ für $w \to z$ eine Kurzschreibweise dafür ist, dass für jede Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{C} \setminus \{z\}$ mit $w_n \overset{n \to \infty}{\to} z$ die Konvergenz $w_n + z \to 2z$ gilt.

(d) Wir nehmen widerspruchshalber an, dass die Funktion f im Punkt 0 differenzierbar ist. Dann gilt

$$\frac{|w|}{w} = \frac{|w| - |0|}{w - 0} = \frac{f(w) - f(0)}{w - 0} \to f'(0)$$

für $w \to z$, das heißt, es gilt für jede Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, die gegen 0 konvergiert, dass $\frac{|w_n|}{w_n} \to f'(0)$ für $n \to \infty$ gilt.

Betrachten wir nun zwei verschiedene solche Folgen $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Wenn wir $w_n := \frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen, gilt $w_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $1 = \frac{|w_n|}{w_n} \to f'(0)$ für $n \to \infty$, also ist $f'(0) = 1$. Wenn wir aber $w_n := -\frac{1}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen, gilt $w_n \to 0$ für $n \to \infty$ und $-1 = \frac{|w_n|}{w_n} \to f'(0)$ für $n \to \infty$, also ist $f'(0) = -1$. Das ist ein Widerspruch, weil $f'(0)$ nicht zwei verschiedene Werte haben kann. $\square$

Ein äquivalente Beschreibung von Differenzierbarkeit, die ebenfalls sehr nützlich für die Anschauung ist[3] lautet folgendermaßen:

Proposition 5.1.4 (Differenzierbarkeit bedeutet gute lineare Approximierbarkeit)**.** *Sei $z \in M \subseteq \mathbb{C}$, sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ und sei $a \in \mathbb{C}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Funktion f ist im Punkt z differenzierbar und es gilt $f'(z) = a$.*

(ii) *Es gibt eine Funktion $e\colon M \to \mathbb{C}$ mit folgenden drei Eigenschaften: Es ist $e(z) = 0$, die Funktion e ist im Punkt z stetig, und für alle $w \in M$ gilt*

$$f(w) = f(z) + a(w - z) + e(w)(w - z).$$

Beweis. "(i) $\Rightarrow$ (ii)" Definiere $e\colon M \to \mathbb{C}$ durch

$$e(w) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} - f'(z) & \text{falls } w \neq z, \\ 0 & \text{falls } w = z. \end{cases}$$

Dann ist $e(z) = 0$ und für jedes $w \in M$ ist

$$f(w) = f(z) + f'(z)(w - z) + e(w)(w - z) = f(z) + a(w - z) + e(w)(w - z).$$

Außerdem gilt für jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M \setminus \{z\}$, die gegen z konvergiert, dass $e(w_n) \to f'(z) - f'(z) = 0 = e(z)$. Weil e die Zahl z natürlich ebenfalls auf $e(z)$ abbildet, gilt dasselbe sogar für jede Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M, die gegen z konvergiert. Laut der Charaktierisierung von Stetigkeit durch Folgenstetigkeit (Theorem 3.3.1) bedeutet das gerade, dass e in z stetig ist.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Für $w \in M \setminus \{z\}$ folgt aus der Formel in (ii)

$$\frac{f(w) - f(z)}{w - z} = a + e(w) \overset{w\to z}{\to} a + e(0) = a,$$

wobei die Eigenschaft $e(w) \overset{w\to z}{\to} e(z)$ wegen der Stetigkeit von e gilt (siehe erneut Theorem 3.3.1). □

Korollar 5.1.5 (Differenzierbare Funktionen sind stetig)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $z \in M$ ein Punkt, der nicht isoliert in M ist. Sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ differenzierbar in z. Dann ist f auch stetig in z.*

Beweis. Das folgt sofort aus Proposition 5.1.4(ii). □

Theorem 5.1.6 (Ableiten von Linearkombinationen und Produkten)**.** *Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $z \in M$ nicht isoliert in M. Seien $f, g\colon M \to \mathbb{C}$.*

[3] Und die in der Analyis 2 eine wichtige Rolle spielen wird.

(a) *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Wenn f und g in z differenzierbar sind, dann ist auch $\alpha f + \beta g$ in z differenzierbar und es gilt*[4]

$$(\alpha f + \beta g)'(z) = \alpha f'(z) + \beta f'(z).$$

(b) *Wenn f und g in z differenzierbar sind, dann ist auch fg in z differenzierbar und es gilt die* ***Produktregel***

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Beweis. (a) Seien f und g differenzierbar in z. Dann gilt für $w \in M \setminus \{z\}$

$$\begin{aligned} \frac{(\alpha f + \beta g)(w) - (\alpha f + \beta g)(z)}{w - z} &= \frac{\alpha f(w) + \beta g(w) - \alpha f(z) - \beta g(z)}{w - z} \\ &= \alpha \frac{f(w) - f(z)}{w - z} + \beta \frac{g(w) - g(z)}{w - z} \overset{w \to z}{\to} \alpha f'(z) + \beta g'(z). \end{aligned}$$

(b) Seien f und g differenzierbar in z. Dann gilt für $w \in M \setminus \{z\}$

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(w) - (fg)(z)}{w - z} &= \frac{f(w)g(w) - f(z)g(w) + f(z)g(w) - f(z)g(z)}{w - z} \\ &= \frac{f(w) - f(z)}{w - z} g(w) + f(z) \frac{g(w) - g(z)}{w - z} \\ &\to f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \qquad \text{für } w \to z, \end{aligned}$$

wobei wir für die Eigenschaft $g(w) \overset{w \to z}{\to} g(z)$ die Stetigkeit von g im Punkt z verwendet haben, die laut Korollar 5.1.5 aus der Differenzierbarkeit von g im Punkt z folgt. □

Beispiel 5.1.7 (Ableiten von Monomfunktionen)**.** Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sei $m_n \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^n$. Aus den Beispielen 5.1.3 wissen wir bereits, dass m_0, m_1 und m_2 differenzierbar sind mit den Ableitungen $m_0'(z) = 0$, $m_1'(z) = 1$ und $m_2'(z) = 2z$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Mit Hilfe von Theorem 5.1.6(b) erhält man hieraus induktiv, dass jedes Funktion m_n differenzierbar ist mit Ableitung $m_n'(z) = nz^{n-1}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $n \in \mathbb{N}$:

- Es gilt $m_3 = m_1 m_2$ und somit ist m_3 differenzierbar und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$m_3'(z) = m_1'(z)m_2(z) + m_1(z)m_2'(z)1 \cdot z^2 + z \cdot 2z = z^2 + 2z^2 = 3z^2.$$

- Es gilt $m_4 = m_1 m_3$ und somit ist m_4 differenzierbar und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$m_4'(z) = m_1'(z)m_3(z) + m_1(z)m_3'(z)1 \cdot z^3 + z \cdot 3z^2 = z^3 + 3z^3 = 4z^3.$$

[4]Diese Regel besagt in anderen Worten: Ableiten ist **linear** in dem Sinne, in dem das Wort in der linearen Algebra benutzt wird.

- Und so weiter.

Theorem 5.1.8 (Kettenregel)**.** *Seien $L, M \subseteq \mathbb{C}$ und sei $z \in M$ nicht isoliert in L. Seien $f\colon L \to M$ und $g\colon M \to \mathbb{C}$ und sei $f(z)$ nicht isoliert in M. Wenn f im Punkt z differenzierbar ist und g im Punkt $f(z)$ differenzierbar ist, dann ist die Hintereinanderausführung $h \circ f\colon L \to \mathbb{C}$ differenzierbar in z und es gilt die* ***Kettenregel***

$$(g \circ f)(z) = g'\big(f(z)\big)f'(z).$$

Für den Beweis liegt es nahe für $z \in M$ und $w \in M \setminus \{z\}$ die Formel

$$\frac{(g \circ f)(w) - (g \circ f)(z)}{w - z} = \frac{g(f(w)) - g(f(z))}{f(w) - f(z)} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

verwenden. Das Problem dabei ist allerdings, dass trotz $w \neq z$ eventuell $f(w) = f(z)$ sein könnte, da f nicht injektiv sein muss; deswegen kann man nicht einfach mit $f(w) - f(z)$ erweitern.

Stattdfessen können wir die Charakterisierung von Differenzierbarkeit als gute lineare Approximierbarkeit (Proposition 5.1.4) verwenden:

Beweis von Theorem 5.1.8. Laut Proposition 5.1.4 gibt es Funktionen $e_f\colon L \to \mathbb{C}$ und $e_g\colon M \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $e_f(z) = 0$ und $e_g(f(z)) = 0$.
- Die Funktion e_f ist stetig im Punkt z und die Funktion e_g ist stetig im Punkt $f(z)$.
- Für alle $w \in L$ gilt

  $$f(w) = f(z) + f'(z)(w - z) + e_f(w)(w - z)$$

  und für alle $v \in M$ gilt

  $$g(v) = g(f(z)) + g'(f(z))(v - f(z)) + e_g(v)(v - f(z)).$$

Somit gilt für jedes $w \in L$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(w) &= g(f(w)) \\ &= g(f(z)) + g'(f(z))(f(w) - f(z)) + e_g(f(w))(f(w) - f(z)) \\ &= (g \circ f)(z) + g'(f(z))f'(z)(w - z) + \tilde{e}(w)(w - z),\end{aligned}$$

wobei wir $\tilde{e}\colon L \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$\tilde{e}(w) \coloneqq g'(f(z))e_f(w) + e_g(f(w))\big(f'(z) + e_f(w)\big)$$

für alle $w \in L$. Es ist $\tilde{e}(z) = 0$. Außerdem ist $\tilde{e}$ stetig in z, weil e_f stetig in z ist, e_g stetig in $f(z)$ ist und f laut Korollar 5.1.5 stetig in z ist. $\square$

5.2 Der Mittelwertsatz

In diesem Abschnitt wollen wir das folgende Theorem beweisen und einige nützliche Konsequenzen daraus herleiten.[5]

Vorlesung 19 (Mi, 18.12.) beginnt mit Theorem 5.2.1

Theorem 5.2.1 (Mittelwertsatz). *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*[6] *Dann gibt es ein $z \in (a,b)$ mit der Eigenschaft $f'(z) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Für den Beweis brauchen wir als Hilfsmittel ein Ergebnis über die Ableitung von Funktionen bei lokalen Extremstellen, (das Sie vermutlich bereits aus der Schule kennen – hier werden Sie nun den Beweis dieses Results sehen).

Definition 5.2.2 (Lokale Extremstellen). Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f\colon M \to \mathbb{R}$.

(a) Ein Punkt $z_{\max} \in M$ heißt **lokale Maximalstelle** von f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $f(z_{\max}) \geq f(z)$ für alle $z \in M \cap B_{<\varepsilon}(z_{\max})$ gilt.

(b) Ein Punkt $z_{\min} \in M$ heißt **lokale Minimalstelle** von f, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass $f(z_{\min}) \leq f(z)$ für alle $z \in M \cap B_{<\varepsilon}(z_{\min})$ gilt.

Einen Punkt, der eine lokale Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle von f ist, bezeichnet man häufig auch als eine **lokale Extremstelle** von f.

Proposition 5.2.3 (Ableitung bei lokalen Extremstellen). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$. Sei $z \in I$ eine lokales Maximalstelle oder eine lokale Minimalstelle von f und sei f im Punkt z differenzierbar. Falls z kein Randpunkt von I ist, gilt $f'(z) = 0$.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für den Fall, dass z eine lokale Maximalstelle von f ist. Der Beweis für den anderen Fall folgt dann hieraus, indem man $-f$ betrachtet.

Sei also z eine lokale Minimalstelle von f und sei z kein Randpunkt von I. Dann gibt es eine Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I \setminus \{0\}$, die links von z liegt und gegen z konvergiert. Für alle genügend großen n gilt[7] $f(w_n) \leq f(z)$, da z eine lokale Maximalstelle von f ist. Also folgt

$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n) - f(z)}{w_n - z} \geq 0,$$

da sowohl der Zähler als auch der Nenner des Bruchs für alle genügend großen n kleiner oder gleich 0 ist.

[5] Vorsicht übrigens bei den Theorem-Namen: Erfahrungsgemäß tendiert man gerne mal dazu, die beiden Begriffe **Mittelwertsatz** und **Zwischenwertsatz** zu verwechseln.

[6] Wenn Sie den unten stehenden Beweis des Theorems genau durchsehen, können Sie übrigens erkennen, dass es genügt vorauszusetzen, dass f stetig ist und die Einschränkung $f|_{(a,b)}$ differenzierbar ist.

[7] Was genau ist mit "für alle genügend großen n" gemeint?

Als nächstes betrachten wir eine andere Folge $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $I\setminus\{z\}$, die rechts von z liegt und gegen z konvergiert; ein solche Folge gibt es ebenfalls, da z kein Randpunkt von I ist. Es gilt wieder $f(w_n) \le f(z)$ für alle genügend großen n und somit ist

$$f'(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n) - f(z)}{w_n - z} \le 0,$$

da der Nenner stehts > 0 ist, aber der Zähler des Bruchs für alle genügend großen n kleiner oder gleich 0 ist.

Insgesamt gilt also $0 \le f'(z) \le 0$, also $f'(z) = 0$. □

In obenstehendem Beweis erkennt man sehr gut, weshalb man die Voraussetzung braucht, dass z kein Randpunkt von I ist. Wenn zum Beispiel z rechter Randpunkt von I ist, dann funktioniert nur der erste Teil des Beweises, das heißt man kann dann nur $f'(z) \ge 0$ zeigen. Und falls z linker Randpunkt von I ist, funktioniert nur der zweite Teil des Beweises, das heißt, man kann dann nur $f'(z) \le 0$ zeigen. Dieses Pähnomen kann man auch in folgendem Beispiel gut erkennen:

Beispiel 5.2.4 (Extremstellen am Rand)**.** Sei $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $z \mapsto z^2$. Dann gilt $f(z) \le 1 = f(1) = f(-1)$ für alle $z \in [-1,1]$, das heißt die beiden Punkte -1 und 1 sind lokale – und sogar globale[8] – Maximalstellen von f. Für alle $z \in [-1,1]$ gilt $f'(z) = 2z$ und somit gilt am linken Randpunkt von $[-1]$, dass $f'(-1) = 2\cdot(-1) = -2 \le 0$ ist; und am rehten Randpunkt von $[-1,1]$ erhält man $f'(1) = 2\cdot 1 = 2 \ge 0$.

Beweis von Theorem 5.2.1. Wir beweis das Theorem zuerst für den Spezialfall, dass $f(a) = f(b) = 0$ gilt. [9] In diesem Fall müssen wir zeigen, dass es ein $z \in (a,b)$ mit $f'(z) = 0$ gibt.

Weil f differenzierbar ist, ist f laut Korollar 5.1.5 stetig. Da $[a,b]$ nichtleer, beschränkt und abgeschlossen ist, gibt aus laut Theorem 3.3.5 Punkt $z_{\min}$ und $z_{\max}$ in $[a,b]$ derart, dass $f(z_{\min}) \le f(z) \le f(z_{\max})$ für alle $z \in [a,b]$ ist.[10] Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- *Erster Fall:* Beide Punkte $z_{\min}$ und $z_{\min}$ sind Randpunkt von $[a,b]$. Dann ist $f(z_{\min}) = 0 = f(z_{\max})$ und somit folgt $f(z) = 0$ für alle $z \in [a,b]$. Also ist f konstant, das heißt, es ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in [a,b]$. Insbesondere können wir uns einen beliebigen Punkt $z \in (a,b)$ aussuchen und erhalten für diesen Punkt $f'(z) = 0$.

- *Zweiter Fall:* Mindestens einer der beiden Punkte $z_{\min}$ und $z_{\min}$ ist kein Randpunkt von $[a,b]$, liegt also in (a,b). Laut Proposition 5.2.3 ist f' an diesem Punkt gleich 0.

[8] Was ist mit dem Begriff **globale Extremstelle** gemeint?

[9] Dieser Spezialfall des Mittelwertsatz wird manchmal auch als **Satz von Rolle** bezeichnet.

[10] Anders ausgedrückt: $z_{\max}$ ist eine **globale Maximalstelle** von f und $z_{\min}$ ist eine **globale Minimalstelle** von f.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, in dem $f(a)$ und $f(b)$ irgendwelche Werte in $\mathbb{R}$ sein können. Wir definieren eine neue Funktion

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{R}, \\ z &\mapsto f(z) - \Big(\frac{b-z}{b-a}f(a) + \frac{z-a}{b-a}f(b)\Big). \end{aligned}$$

Dann ist g als Summe zweier differenzierbarer Funktionen ebenfalls differenzierbar mit $g'(z) = f'(z) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a} - \frac{f(b)}{b-a}$ für alle $z \in [a,b]$. Es gilt $g(a) = 0 = g(b)$, also können wir den zuvor bewiesenen Spezialfall auf g anwenden – es gibt also ein $z \in (a,b)$ mit der Eigenschaft $g'(z) = 0$ und für dieses z ist folglich

$$0 = g'(z) = f'(z) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Korollar 5.2.5 (Funktionen mit verschwindender Ableitung – reeller Fall)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt*[11] *und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f'(z) = 0$ für alle $z \in I$ gilt, dann ist f konstant.*

Beweis. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Wir zeigen, dass $f(a) = f(b)$ gilt. In dem wir den Mittelwertsatz (Theorem 5.2.1) auf die Einschränkung von f auf das Intervall $[a,b]$ anwenden, erhalten wir ein $z \in (a,b)$, für das

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(z) = 0$$

gilt. Also ist in der Tat $f(a) = f(b)$. □

Nun beweisen wir ein analoges Resultat auch im komplexen Fall. Das ist ein wenig subtil, weil der Mittelwertsatz (Theorem 5.2.1) in der oben besprochenen Form nur im Reellen gilt.

Korollar 5.2.6 (Funktionen mit verschwindender Ableitung – komplexer Fall)**.** *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in (0,\infty]$ und sei $f\colon B_{<r}(z_0) \to \mathbb{C}$ differenzierbar. Falls $f'(z) = 0$ für alle $z \in B_{<r}(z_0)$ gilt, dann ist f konstant.*[12]

Beweis. Seien $z_1, z_2 \in B_{<r}(z_0)$ mit $z_1 \neq z_2$. Wir müssen $f(z_1) = f(z_2)$ zeigen.

Dazu betrachten wir diejenige Funktion, die die gerade Verbindungslinie von z_1 nach z_2 linear parametrisiert, das heißt die Funktion

$$\varphi : [0,1] \to B_{<r}(z_0),$$

[11] Und damit mit unendlich vielen Punkten.

[12] Im Beweis des Korollars können Sie übrigens erkennen, dass das Korollar nicht nur für Funktionen gilt, die auf offenen Kreisscheiben definiert sind, sondern beispielsweise auch für Funktionen, die auf sogenannten **konvexen** Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert sind. Es sogar noch deutlich allgemeiner, aber darauf gehen wir an dieser Stelle noch nicht weiter ein.

$$t \mapsto z_1 + t(z_2 - z_1).$$

Laut Aufgabe ... auf Hausaufgabenblatt 10 ist die Abbildung $\mathrm{Re} \circ f \circ \varphi \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und die Ableitung dieser Funktion ist gleich

$$(\mathrm{Re} \circ f \circ \varphi)'(t) = \mathrm{Re}\Big(f'(\varphi(t))\varphi'(t)\Big) == 0$$

für alle $t \in [0,1]$. Somit ist $\mathrm{Re} \circ f \circ \varphi$ laut Korollar 5.2.5 konstant, das heißt, es gilt $\mathrm{Re}\, f(z_1) = \mathrm{Re}(f(\varphi(0))) = \mathrm{Re}(f(\varphi(1))) = \mathrm{Re}\, f(z_2)$.

Indem wir dasselbe Argument auch auf die Funktion $-\mathrm{i}f$ anwenden, erhalten wir außerdem $\mathrm{Im}\, f(z_1) = \mathrm{Re}(-\mathrm{i}f(z_1)) = \mathrm{Re}(-\mathrm{i}f(z_2)) = \mathrm{Im}\, f(z_2)$. Also ist ingesamt $f(z_1) = f(z_2)$. □

Eine weitere sehr nützliche Konsequenz des Mittelwertsatz ist die folgende Charakterisierung von Montonie, die Sie vermutlich schon aus der Schule kennen.

Korollar 5.2.7 (Monotonie via Ableitungen)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und sei $f \colon I \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(a) *Es ist f genau dann monoton steigend, wenn $f'(z) \geq 0$ für alle $z \in I$ gilt.*

Falls sogar $f'(z) > 0$ für alle $z \in I$ gilt, dann ist f streng monoton steigend.[13]

(b) *Es ist f genau dann monoton fallend, wenn $f'(z) \leq 0$ für alle $z \in I$ gilt.*

Falls sogar $f'(z) < 0$ für alle $z \in I$ gilt, dann ist f streng monoton fallend.

Beweis. (a) Wir beweisen zuerst die behauptete Äquivalenz.

"$\Rightarrow$" Nehmen wir an, dass f monoton steigend ist. Sei $z \in I$. Für alle $w \in I \setminus \{z\}$ gilt im Fall $w > z$, dass $f(w) \geq f(z)$ ist und im Falle $w < z$, dass $f(w) \leq f(z)$ ist. Also ist in jedem Fall $\frac{f(w)-f(z)}{w-z} \geq 0$. Somit folgt

$$f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \geq 0.$$

"$\Leftarrow$" Nehmen wir an, dass $f'(z) \geq 0$ für alle $z \in I$ gilt. Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Wir müssen $f(a) \leq f(b)$ zeigen. Aufgrund des Mittelwertsatzes (Theorem 5.2.1) gibt es ein $z \in (a,b)$ mit der Eigenschaft

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(z) \geq 0,$$

also ist $f(b) - f(a) \geq 0$ und somit $f(b) \geq f(a)$.

Mit fast wörtlich dem gleichen Argument zeigt man auch, dass f streng monoton steigend ist, wenn $f'(z) > 0$ für alle $z \in I$ gilt.

(b) Wende (a) auf $-f$ an. □

[13] Weshalb fehlt bei dieser Aussage die umgekehrte Implikation?

5.3 Exponentialfunktion, Logarithmus und reelle Exponenten

Vorlesung 20 (Fr, 20.12.) beginnt mit Theorem 5.3.1

Theorem 5.3.1 (Ableitung von Potenzreihen)**.** *Wie in Theorem 4.2.3 sei $z_0 \in \mathbb{C}$, und $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\ell := \limsup_{k\to\infty} |a_k|^{1/k} < \infty$. Wir setzen*

$$r := \begin{cases} \frac{1}{\ell} & \text{falls } \ell > 0, \\ \infty & \text{falls } \ell = 0. \end{cases}$$

Dann gilt auch $\ell := \limsup_{k\to\infty} |(k+1)a_{k+1}|^{1/k} = \ell$, die Funktion

$$\begin{aligned} f \colon B_{<r}(z_0) &\to \mathbb{C}, \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \end{aligned}$$

ist stetig differenzierbar und ihre Ableitung $f' \colon B_{<r}(z_0) \to \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z - z_0)^k$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Mit anderen Worten: Den Grenzwert einer Potenzreihe kann man ableiten, in dem man jeden Summanden einzeln ableitet.

Der Beweis ist ein bisschen technisch: Man kann zum Beispiel mehrmals die geometrischen Summenformel bezeihungsweise die geometrische Reihenformel benutzen und muss dabei aufpassen, dass man die Dreiecksungleichung zu einem geeigneten Zeitpunkt (nicht zu früh) verwendet. Wir verzichten darauf den Beweis an dieser Stelle auszuführen. Wenn Sie möchten, können Sie ihn in der Literatur nachlesen. Zum Beispiel finden Sie einen Beweis des Resultats – und noch allgemeinerer Sätze – in [Kön04, Abschnitt 9.5].

Mit Hilfe von Differentialrechnung können wir nun ganz leicht zahlreiche nützliche Eigenschaften der Exponentialfunktion bewweisen, unter anderem die Funktionalgleichung

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2) \qquad \text{für all } z_1, z_2 \in \mathbb{C},$$

die wir bereits in Proposition 4.3.3(b) behauptet hatten.

Theorem 5.3.2 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.** *Die Exponentialfunktion* $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *hat folgende Eigenschaften:*

(a) *Die Funktion* exp *ist differenzierbar und gleich ihrer eigenen Ableitung, das heißt, es gilt* $\exp'(z) = \exp(z)$ *für alle* $z \in \mathbb{C}$.

(b) *Es gilt* $\exp(0) = 1$.

(c) *Für alle* $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

(d) *Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $\exp(z) \neq 0$ *und* $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

(e) *Die Einschränkung* $\exp|_{\mathbb{R}}$ *bildet bijektiv von* $\mathbb{R}$ *nach* $(0, \infty)$ *ab und ist streng monoton wachsend.*

(f) *Es gilt* $|\exp(\mathrm{i}\theta)| = 1$ *für alle* $\theta \in \mathbb{R}$*, das heißt,* exp *bildet die imaginäre Achse in die komplexe Einheitskreislinie ab.*

(g) *Für jedes* $z \in \mathbb{C}$ *gilt* $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

Beweis. (a) Laut Theorem 5.3.1 ist exp differenzierbar mit Ableitung

$$\exp'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{z^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

(b) Es gilt $\exp(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} = \frac{0^0}{0!} = 1$.

(c) Sei $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ beliebig, fest. Betrachten wir die Funktion $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \exp(z_1 + z_2 - z)\exp(z)$. Dann gilt wegen (b) $g(0) = \exp(z_1 + z_2)$. und wegen (a) folgt aus der Produktregel und der Kettenregel, dass g differenzierbar ist und seine Ableitung

$$g'(z) = -\exp(z_1 + z_2 - z)\exp(z) + \exp(z_1 + z_2 - z)\exp(z) = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt. Laut Korollar 5.2.6 ist g somit konstant, also folgt

$$\exp(z_1 + z_2 - z)\exp(z) = g(z) = \exp(z_1 + z_2)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Insbesondere folgt für $z := z_2$, dass $\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2)$ gilt.

(d) Wegen (c) und (b) gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ die Gleichung $\exp(-z)\exp(z) = \exp(0) = 1$, das heißt, es ist tatsächlich $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

(e) Wir beweisen zunächst, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ die Eigenschaft $\exp(x) \in (0, \infty)$ gilt; sei dazu $x \in \mathbb{R}$ beliebig, fest. Falls $x \geq 0$ ist, gilt $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \geq \frac{0^0}{0!} = 1 > 0$, da alle Summanden ≥ 0 sind. Falls $x < 0$ ist, folgt aus (d), dass $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0$ gilt.

Als nächstes beweisen wir, dass $\exp|_{\mathbb{R}}$ streng monoton wachsend ist. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp'(x) = \exp(x) > 0$, wobei die Gleichheit wegen (a) gilt und wir die Ungleichung soeben bewiesen haben. Laut Korollar 5.2.7(a) ist $\exp|_{\mathbb{R}}$ somit streng monoton steigend.

Insbesondere ist $\exp|_{\mathbb{R}}$ somit injekitv. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Funktion surjektiv auf $(0, \infty)$ abbildet. Sei dazu $y \in (0, \infty)$ beliebig, fest. Sei $u := \max\{y, \frac{1}{y}\} > 0$. Dann gilt $\exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \geq \frac{u^1}{1!} = u \geq y$ und $\exp(-u) = \frac{1}{\exp(u)} \leq \frac{1}{u} \leq y$, wobei wir für die erste Gleichheit wieder (d) benutzt haben. Insgesamt ist also

$\exp(-u) \leq y \leq \exp(u)$. Da exp laut Proposition (a) stetig ist,[14] gibt es wegen des Zwischenwertsatzes (Theorem 2.1.10) gibt es somit ein $x \in [-u, u]$ mit der Eigenschaft $\exp(x) = y$.

(f) Die Abbildung $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{z}$ ist stetig[15] und hieraus folgt für alle $z \in \mathbb{C}$, dass $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$ gilt.[16] Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$\begin{aligned} |\exp(\mathrm{i}\theta)|^2 &= \overline{\exp(\mathrm{i}\theta)}\exp(\mathrm{i}\theta) = \exp(\overline{\mathrm{i}\theta})\exp(\mathrm{i}\theta) \\ &= \exp(-\mathrm{i}\theta)\exp(\mathrm{i}\theta) \overset{(c)}{=} \exp(-\mathrm{i}\theta + \mathrm{i}\theta) = \exp(0) \overset{(b)}{=} 1, \end{aligned}$$

womit $|\exp(\mathrm{i}\theta)| = 1$ bewiesen ist.

(g) Sei $z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |\exp(z)| &= |\exp(\operatorname{Re} z + \mathrm{i} \operatorname{Im} z)| \overset{(c)}{=} |\exp(\operatorname{Re} z)\exp(\mathrm{i} \operatorname{Im} z)| \\ &= |\exp(\operatorname{Re} z)|\,|\exp(\mathrm{i} \operatorname{Im} z)| \overset{(f),\,(e)}{=} \exp(\operatorname{Re} z) \cdot 1 = \exp(\operatorname{Re} z), \end{aligned}$$

womit auch die letzte Aussage bewiesen ist. □

Da die reelle Exponentialfunktion $\exp|_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ laut Theorem 5.3.2(e) bijektiv ist, besitzt sie eine Umkehrfunktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}$:

Definition 5.3.3 (Der natürliche Logarithmus)**.** Die Umkehrfunktion von $\exp|_{\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ bezeichnet man mit $\log \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ oder mit $\ln \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Man nennt sie den **natürlichen Logarithmus**.

Der der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion der reellen Exponentialfunktion definiert ist, erfüllt der die Gleichungen

$$\begin{aligned} & \exp(\log(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in (0, \infty), \\ \text{und} \qquad & \log(\exp(x)) = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Proposition 5.3.4 (Eigenschaften des natürlichen Logarithmus)**.** *Der natürliche Logarithmus* $\log \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Funktion* log *ist bijektiv von* $(0, \infty)$ *nach* $\mathbb{R}$ *und streng monoton wachsend.*

(b) *Es gilt* $\log(1) = 0$.

(c) *Für alle* $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ *gilt* $\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2)$.

(d) *Die Funktion* log *ist differenzierbar und somit insbesondere stetig. Für jedes* $x \in (0, \infty)$ *gilt* $\log'(x) = \frac{1}{x}$.

[14] Alternativ folgt die Stetigkeit von exp aus (a), da differenzierbare Funktionen laut Korollar 5.1.5 stetig sind.

[15] Können Sie das im Detail begründen?

[16] Können Sie die Details dieses Arguments angeben?

Betrachten wir eine Zahl $y \in (0,\infty)$ und ein $q = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $\ell \neq 0$. In Definition 2.3.5 hatten wir die Potenz y^q definiert als diejenige Zahl $x_0 \in (0,\infty)$, welche die Gleichung $x_0^\ell = y^k$ erfüllt. Laut Proposition 2.3.4 existiert eine solche Zahl $x_0 \in (0,\infty)$, ist eindeutig bestimmt, und hängt nur von q ab. Wir können die Zahl y^q nun mit Hilfe des Logarithmus und der Exponentialfunktion darstellen:

Proposition 5.3.5 (Rationale Exponenten via Exponentialfunktion und Logarithmus)**.** *Sei $y \in (0,\infty)$ und sei $q = \frac{k}{\ell} \in \mathbb{Q}$ mit $k, \ell \in \mathbb{Z}$ und $\ell \neq 0$. Dann gilt*

$$y^q = \exp(q \log(y)).$$

Beweis. Wegen der Definition von y^q (Definition 2.3.5) müssen wir nur zeigen, dass $\big(\exp(q\log(y))\big)^\ell = y^k$ gilt. Das können wir mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (Theorem 5.3.2(c)) leicht tun: Es gilt

$$\begin{aligned}
\big(\exp(q\log(y))\big)^\ell &= \underbrace{\exp(q\log(y))\cdots\exp(q\log(y))}_{\ell \text{ Faktoren}} \\
&= \exp(\ell q \log(y)) \\
&= \exp(k\log(y)) \\
&= \exp(\underbrace{\log(y) + \cdots + \log(y)}_{k \text{ Summanden}}) \\
&= \underbrace{\exp(\log(y))\cdots\exp(\log(y))}_{k\text{Faktoren}} \\
&= \big(\exp(\log(y))\big)^k \\
&= y^k,
\end{aligned}$$

womit die Behauptung bewiesen ist. □

Proposition 5.3.5 legt nahe, auch Potenzen mit reellen – und sogar mit komplexen – Exponenten folgendermaßen zu definieren:

Definition 5.3.6 (Potenzen mit reellen Exponenten)**.** Sei $y \in (0,\infty)$ und $z \in \mathbb{C}$. Dann definiert man[17]

$$y^z := \exp(z\log(y)) \in (0,\infty).$$

Proposition 5.3.7 (Rechenregeln für reelle Exponenten)**.**

(a) *Für alle $x \in (0,\infty)$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x^{z_1+z_2} = x^{z_1}x^{z_2}.$$

(b) *Für alle $x \in (0,\infty)$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x^{z_1 z_2} = \big(x^{z_1}\big)^{z_2}.$$

[17] Übrigens ist es zusätzlich üblich, für den Fall $z \in (0,\infty)$ die Definition $0^z := 0$ zu verwenden.

(c) *Für alle* $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ *und* $z \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(x_1 x_2)^z = x_1^z x_2^z.$$

Beweis. Der Beweis dieser Regeln folgt leicht aus den Rechenregeln der Exponentialfunktion. Die Details besprechen wir in den Übungen. □

Vorlesung 21 (Mi, 08.01.) beginnt mit Definition 5.3.8

Definition 5.3.8 (Eulersche Zahl)**.** Man nennt die Zahl

$$\mathrm{e} := \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \in (1, \infty)$$

die **Eulersche Zahl**.

Man beachte, dass $\log(\mathrm{e}) = \log(\exp(1)) = 1$ gilt. Somit gilt für alle $z \in \mathbb{R}$ laut Definition 5.3.6

$$\mathrm{e}^z = \exp(z \log(\mathrm{e})) = \exp(z).$$

Das legt nahe, dass man die Exponentialfunktion auch häufig als **e-Funktion** bezeichnet.

5.4 Höhere Ableitungen und Taylorentwicklung

Definition 5.4.1 (Höhere Ableitungen)**.** Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge ohne isolierte Punkte und sei $f : M \to \mathbb{C}$.

(a) Man nennt f **zweimal differenzierbar**, falls f differenzierbar ist und die Ableitung f' ebenfalls differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion $f'' := (f')'$ die **zweite Ableitung von f**.

(b) Man nennt f **dreimal differenzierbar**, falls f zweimal differenzierbar ist und die zweite Ableitung f'' ebenfalls differenzierbar ist. In diesem Fall nennt man die Funktion $f''' := (f'')'$ die **dritte Ableitung von f**.

(c) Ebenso definiert man iterativ **n-malige Differenzierbarkeit** und **n-te Ableitungen** für $n \in \mathbb{N}$; die n-te Ableitung notiert man hierbei als $f^{(n)}$.

Der Vollständigkeit halber setzt man noch $f^{(0)} := f$, das heißt, man definiert die nullte Ableitung von f als f selbst (ohne irgendwelche Voraussetzungen an f).

(d) Man nennt f **beliebig oft differenzierbar**, wenn die Funktion n-mal differenzierbar ist für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beispiel ist für eine dreimal differenzierbare Funktion f also

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f, \\ f^{(1)} &= f', \\ f^{(2)} &= f'', \\ f^{(3)} &= f'''. \end{aligned}$$

Beispiele 5.4.2 (Einige Beispiele für höhere Ableitungen)**.** (a) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ is beliebig oft differenzierbar und es gilt $\exp^{(n)} = \exp$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) Jede Polynomfunktion f ist beliebig oft differenzierbar. Zum Beispiel gilt für die Monomfunktion $m_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2$ und für jedes $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} m_2(z) &= z^2, \\ m_2'(z) &= 2z, \\ m_2''(z) &= 2, \\ m_2^{(n)}(z) &= 0 \qquad \text{für alle } n \geq 3. \end{aligned}$$

(c) Betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(z) = \begin{cases} z^2 & \text{falls } z \geq 0, \\ 0 & \text{falls } z < 0. \end{cases}$$

Dann ist f differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar, weil die Funktion f' im Punkt 0 nicht differenzierbar ist.

Die Details zu diesem Beispiel besprechen wir in den Übungen.

(d) Durch mehrfache Anwendung von Theorem 5.3.1 kann man sehen, dass jede Potenzreihe (auf der Kreisscheibe, auf der sie definiert ist, das heißt, innerhalb ihre Konvergenzradius) beliebig oft differenzierbar ist und dass man für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ die n-te Ableitung berechnen kann, in dem man jeden Summanden n-mal differenziert.

Laut Proposition 5.1.4 bedeutet Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt gute Approximierbarkeit in der Nähe dieses Punktes durch eine lineare Funktion: Sei zum Beispiel $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Dann gibt es eine Funktion $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die im Punkt z_0 stetig ist und $e(z_0) = 0$ erfüllt, und für die

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + e(z)(z - z_0) \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \tag{5.4.1}$$

gilt.[18] Es ist eine naheliegende Idee, dass die Approximation noch "besser" wird, wenn man nicht nur lineare Funktionen verwendet, sondern versucht f durch ein Polynom zu approximieren.

Lassen Sie uns das zum Beispiel für ein Polynom vom Grad 2 versuchen: Wir suchen also Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, die im Punkt z_0 stetig ist und $e(0) = 0$ erfült, und für die

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + e(z)(z - z_0)^2 \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \tag{5.4.2}$$

gilt. Die Tatsache, dass die Approximation – zumindest in der Nähe von z_0 – nun besser sein soll, kommt durch den Faktor $(z - z_0)^2$ hinter $e(z)$ zum Ausdruck. Für $z \to z_0$ geht nämlich der Fehler $e(z)(z - z_0)^2$ in (5.4.2) schneller gegen 0 als der Fehler $e(z)(z - z_0)$ in (5.4.1).

Wir wissen an dieser Stelle noch nicht, ob so etwas wirklich geht – aber nehmen wir einmal kurz an, dass so eine quadratische Approximation möglich ist. Wie finden wir dann die Koeffienten a_0, a_1, a_2? Tun wir der Einfachkeit halber für den Moment so, als wären die Funktionen f und e beide zweimal differenzierbar. Dann erhalten wir:

(1) Indem wir in (5.4.2) $z := z_0$ einsetzen, sehen wir, dass $a_0 = f(z_0)$ ist.

(2) Indem wir (5.4.2) einmal ableiten, erhalten wir

$$f'(z) = a_1 + 2a_2(z - z_0) + e'(z)(z - z_0)^2 + 2e(z)(z - z_0)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Einsetzen von $z := z_0$ ergibt somit, dass $a_1 = f'(z_0)$ ist.

(3) Indem wir (5.4.2) sogar zweimal ableiten, erhalten wir

$$f''(z) = 2a_2 + (z - z_0)^2 + e''(z)(z - z_0)^2 + 4e'(z)(z - z_0) + 2e(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Einsetzen von $z := z_0$ ergibt folglich, dass $2a_2 = f''(z_0)$ ist.

Also haben wir

$$\begin{aligned} a_0 &= f(z_0), \\ a_1 &= f'(z_0), \\ a_2 &= \frac{f''(z_0)}{2} \end{aligned}$$

erhalten – aber nur unter der Voraussetzung, dass so eine Approximation tatsächlich möglich ist und dass f und e beide zweimal differenzierbar sind.

Man kann diesselbe Rechnung zum Beispiel auch für eine Approximation durch ein Polynom dritten Grades machen – also f in der Form

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + e(z)(z - z_0)^3$$

[18] In der Gleichung (5.4.1) haben wir die Notation etwas anders gewählt als in Proposition 5.1.4, aber der Inhalt ist derselbe.

für alle $z \in \mathbb{C}$ schreiben. Falls so eine Approximation möglich ist, dabei wieder $e(0) = 0$ gilt, und die Funktionen f und e sogar dreimal differenzierbar sind, dann kann man eine ähnliche Rechnung wie im quadratischen Fall durchführen und erhält

$$\begin{aligned} a_0 &= f(z_0), \\ a_1 &= f'(z_0), \\ a_2 &= \frac{f''(z_0)}{2}, \\ a_2 &= \frac{f'''(z_0)}{6} = \frac{f'''(z_0)}{3!}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt, dass solch eine Approximation bis zum Grad $n \in \mathbb{N}$ tatsächlich immer möglich ist, falls die Funktion f n-mal differenzierbar ist, und dass die entsprechende Formel für die Koeffizienten auch dann gilt, wenn man im Voraus keine Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion e annimmt.

Theorem 5.4.3 (Taylorapproximation)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und $z_0 \in \mathbb{R}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion. Dann gibt es eine stetige Funktion $e_n : I \to \mathbb{R}$ mit $e_n(z_0) = 0$ und derart, dass*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k + e_n(z)(z - z_0)^n$$

für alle $z \in I$ gilt.

Beweis. Eine grobe Intuition, weshalb man die Formel so erwarten würde, können Sie vor dem Theorem nachlesen. Für die technischen Details verweisen wir auf das Addendum in Abschnitt 5.7. □

Als eine erste nette Anwendung der Taylorapproximation zeigen wir im folgenden Korollar, wie man die zweite Ableitung mit Hilfe eines *Differenzenquotienten zweiter Ordnung* approximieren kann. Um das Resultat richtig zu interpretieren, rufen Sie sich zunächst in Erinnerung, dass die Ableitung einer Funktion f in einem Punkt z_0 laut Definition 5.1.2(a) als der Grenzwert

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0 + \delta) - f(z_0)}{\delta}$$

definiert ist.[19]

Korollar 5.4.4 (Differenzenquotienten zweiter Ordnung)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und sei $z_0 \in I$.*

[19]Wie genau ist die Aussage $f'(z_0) = \lim_{\delta \to 0} \frac{f(z_0+\delta)-f(z_0)}{\delta}$? Können Sie sie mit Hilfe von Folgen $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formulieren?

(a) *Wenn z_0 kein Randpunkt von I ist, gilt*[20]

$$f''(z_0) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(z_0+\delta) - 2f(z_0) + f(z_0-\delta)}{\delta^2}.$$

(b) *Es gilt stets*

$$f''(z_0) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(z_0+2\delta) - 2f(z_0+\delta) + f(z_0)}{\delta^2}$$

und

$$f''(z_0) = \lim_{\delta\to 0} \frac{f(z_0) - 2f(z_0-\delta) + f(z_0-2\delta)}{\delta^2}.$$

Vorlesung 22 (Fr, 10.01.) beginnt mit dem Beweis von Korollar 5.4.4.

Beweis. (a) Laut Theorem 5.4.3 gibt es eine stetige Funktion $e_2 : I \to \mathbb{R}$ mit $e_2(z_0) = 0$, für die

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}f''(z_0)(z-z_0)^2 + e_2(z)(z-z_0)^2$$

für alle $z \in I$ gilt. Für $\delta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $z+\delta \in I$ und $z-\delta \in I$ gilt somit

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z_0+\delta) - 2f(z_0) + f(z_0-\delta)}{\delta^2} \\
&= \frac{1}{\delta^2}\Big(f(z_0) + f'(z_0)\delta + \frac{1}{2}f''(z_0)\delta^2 + e_2(z_0+\delta)\delta^2 \\
&\qquad - 2f(z_0) \\
&\qquad + f(z_0) - f'(z_0)\delta + \frac{1}{2}f''(z_0)\delta^2 + e_2(z_0-\delta)\delta^2\Big) \\
&= f''(z_0) + e_2(z_0+\delta) + e_2(z_0-\delta) \\
&\overset{\delta\to 0}{\to} f''(z_0) + 2e_2(z_0) = f''(z_0).
\end{aligned}$$

□

(b) Der Beweis dieser Aussagen ist analog zum Beweis von (a).

Wenn wir in Kapitel 6.1 die Grundlagen der Integralrechnung entwickelt haben, kommen wir nochmals auf Taylorentwicklungen zurück, denn mit Hilfe von Integralrechnung kann man Taylorentwicklungen etwas genauer untersuchen und insbesondere eine konrete Formel für den Fehlerterm $e_n(x)(x-x_0)^n$ angeben.

[20] Weshalb braucht man für diese Formel die Annahme, dass z_0 keine Randpunkt von I ist?

5.5 Kurvendiskussion

In Korollar 5.2.7 hatten wir die Monotonie von Funktionen mit Hilfe der ersten Ableitung charakterisiert. Analog dazu beweisen wir nun, dass sich die Konvexität von Funktionen mit Hilfe der zweiten Ableitung beschreiben lässt.

Theorem 5.5.1 (Konvexität via zweiter Ableitung)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Die Funktion f ist genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Nehmen wir an, dass f konvex ist.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass x kein Randpunkt von I ist. Für alle Zahlen $\delta \neq 0$, die genügend nahe bei 0 liegen, gilt dann $x - \delta \in I$ und $x + \delta \in I$. Für solche δ schreiben wir x als

$$x = \frac{1}{2}(x + \delta) + \frac{1}{2}(x - \delta)$$

und erhalten somit aus der Konvexität von f

$$f(x) = f\Big(\frac{1}{2}(x + \delta) + \frac{1}{2}(x - \delta)\Big) \leq \frac{1}{2}f(x + \delta) + \frac{1}{2}f(x - \delta),$$

also $2f(x) \leq f(x + \delta) + f(x - \delta)$. Laut Korollar 5.4.4(a) ist somit

$$f''(x) = \lim_{\delta \to 0} \underbrace{\frac{f(x + \delta) - 2f(x) + f(x - \delta)}{\delta^2}}_{\geq 0} \geq 0.$$

Die Fälle, in denen x ein Randpunkt von I ist, behandelt man analog mit Hilfe der beiden anderen Teile von Korollar 5.4.4.

"$\Leftarrow$" Nehmen wir an, dass $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Um die Konvexität von f zu beweisen, betrachten wir zwei beliebige, feste Zahlen $x_1, x_2 \in I$, sagen wir mit $x_1 < x_2$[21] sowie Zahlen $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Wir müssen $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$ zeigen. Falls $\lambda_1 = 1$ oder $\lambda_2 = 1$ ist, ist diese Ungleichung klar (sie ist dann sogar eine Gleichung), also sei $\lambda_1 < 1$ und $\lambda_2 < 1$. Dann sind beide Zahlen λ_1, λ_2 auch > 0 und für Zahl $z := \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ gilt somit $x_1 < z < x_2$.

Wir wenden nun den Mittelwertsatz (Theorem 5.2.1) auf die Funktion f' an. Damit erhalten wir Zahlen z_1, z_2 mit $x_1 < z_1 < z < z_2 < x_2$, für die

$$f'(z_1) = \frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} \qquad \text{und} \qquad f'(z_2) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}$$

gilt. Wegen der Annahme $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist die Funktion f' laut Korollar 5.2.7 monoton wachsend, also folgt

$$\frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(z_1) \leq f'(z_2) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}.$$

[21] Weshalb darf man das annehmen?

Wegen $z - x_1 = \lambda_2(x_2 - x_1)$ und $x_2 - z = \lambda_1(x_2 - x_1)$ folgt

$$\lambda_1\bigl(f(z) - f(x_1)\bigr) \leq \lambda_2\bigl(f(x_2) - f(z)\bigr)$$

und somit

$$f(z) = \lambda_1 f(z) + \lambda_2 f(z) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Also ist f tatsächlich konvex. □

Beispiele 5.5.2 (Exponentialfunktion und Logarithmus)**.**

(a) Die reelle Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist konvex.

(b) Der natürliche Logarithmus $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist konkav.

Beweis. (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp''(x) = \exp(x) \geq 0$, also folgt die Konvexität auf Theorem 5.5.1.

(b) Für alle $x \in (0, \infty)$ ist $-\log''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$, also ist $-\log$ laut Theorem 5.5.1 konvex und somit ist log konkav. □

Theorem 5.5.3 (Lokale Extrema mittels erster und zweiter Ableitung)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Sei $x_0 \in I$ kein Randpunkt von I.*

(a) *Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ gilt, dann ist x_0 eine **strikte lokale Minimalstelle von f**, das heißt es gilt $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in I$, die genügend nahe bei x_0 liegen.*

(b) *Falls $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ gilt, dann ist x_0 eine **strikte lokale Maximalstelle von f**, das heißt es gilt $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in I$, die genügend nahe bei x_0 liegen.*

Beweis. (a) Sei $f'(x_0)$ und $f''(x_0) > 0$. Laut Theorem 5.4.3 gibt es eine stetige Funktion $e_2 : I \to \mathbb{R}$ mit $e_2(x_0) = 0$, für die

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + e_2(x)(x - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + e_2(x)(x - x_0)^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in I$ gilt. Wegen und $f''(x_0) > 0$ gilt $e_2(x) \to e_2(x_0) = 0$ for $x \to x_0$ gilt $-e_2(x) \leq |e_2(x)| < \frac{1}{2} f''(x_0)$ für alle $x \in I$, die genügend nahe bei x_0 liegen. Für alle diese x ist somit $f(x) \geq f(x_0)$ und die Ungleichung ist sogar strikt, falls $x \neq x_0$ ist (da dann $(x - x_0)^2 \neq 0$ ist).

(b) Das folgt, indem man (a) auf die Funktion $-f$ anwendet. □

Die bisherigen Resultate kann man sehr gut benutzen, um die Gestalt von Funktionsgraphen grob zu skizzieren. Das bezeichnet man auch als **Kurvendiskussion**, ein Begriff, den Sie vermutlich aus der Schule kennen. Ein weiteres Konzept, was für Kurvendiskussion sehr hilfreich ist, ist der **Grenzwert** von Funktionen am Rande ihres Definitionsbereichs oder bei ∞ und $-\infty$. Diesen versteht man genauso, wie wir es in Definition (a) schon bei der Definition der Ableitung getan hatten: Seien zum Beispiel $-\infty \leq a < b \leq \infty$, sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, und sei $d \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Wir schreiben

$$\lim_{x \to a} f(x) = d \qquad \text{oder} \qquad f(x) \stackrel{x \to a}{\to} d,$$

falls für jedes Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in (a, b), die gegen a konvergiert, die Folge $\big(f(x_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen d konvergiert. Analog definiert man Konvergenz von $f(x)$ für $x \to b$. Das kann man natürlich nicht nur für Intervalle tun, sondern auch für Funktionen, die auf allgemeineren Mengen definiert sind.

Lassen Sie uns nun ein Beispiel besprechen, wie man "die Kurve einer Funktion" diskutieren kann.

Vorlesung 23 (Mi, 15.01.) beginnt in Beispiel 5.5.4.

Beispiel 5.5.4. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \exp(x)$. Dann ist f wegen der Produktregel differenzierbar; durch mehrfache Anwendung der Produktregel sieht man, dass f sogar beliebig oft differenzierbar ist. Wir sehen uns nun verschiedene Eigenschaften von f an um zu verstehen, wie der Funktiongraph grob ausguckt:

1. *Grenzverhalte bei ∞:* Für jedes $x \geq 0$ gilt $\exp(x) \geq 1$ und somit $f(x) \geq x$. Also gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$.[22]

2. *Grenzverhalten bei $-\infty$:* Es gilt $f(x) \to 0$ für $x \to -\infty$. Das wird in Aufgabe 3 auf Hausaufgabenblatt 12 gezeigt.

3. *Monotonieverhalten:* Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

   $$f'(x) = \exp(x) + x \exp(x) = (1 + x) \exp(x).$$

   Also ist die Funktion auf dem Intervall $(-\infty, -1)$ streng monoton steigend und auf $(-1, \infty)$ streng monoton fallend.

4. *Konvexitätsverhalten:* Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

   $$f''(x) = \exp(x) + \exp(x) + x \exp(x) = (2 + x) \exp(x).$$

   Also ist f auf dem Intervall $(-\infty, -2]$ konkav und auf $[-2, \infty)$ konvex.

[22] Das Argument, das wir hier verwendet haben, ist übrigens in gewissem Sinne eine ziemliche "Untertreibung": Wir haben die e-Funktion hier gar nicht verwendet und stattdessen nur benutzt, dass für $x \to \infty$ auch, nunja, $x \to \infty$ gilt. Tatsächlich geht, wie Sie sicher wissen, $\exp(x)$ noch viel schneller gegen ∞, wenn x gegen ∞ geht.

5. *Lokale Extremstellen:* Die Ableitung f' ist nur der Stelle -1 gleich 0. Für die zweite Ableitung gilt dort $f''(-1) = \exp(-1) > 0$, also ist -1 eine lokale Minimalstelle von f und zudem die einzige lokale Extremalstelle. Aufgrund des bereits untersuchten Monotonieverhaltens wissen wir außerdem, dass -1 sogar eine globale Minimalstelle von f ist.

5.6 Die trigonometrischen Funktionen

Definition 5.6.1 (Kosinus und Sinus)**.** Die Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert man durch

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)\big)$$

und

$$\sin(z) := \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)\big)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Häufig schreibt man kurz $\cos z$ und $\sin z$ anstelle von $\cos(z)$ und $\sin(z)$, wenn keine Gefahr der Verwirrung besteht.

Beachten Sie, dass man diesen Definitionen noch überhaupt nicht ansieht, dass diese Funktionen irgendetwas mit dem zu tun haben, was Sie in der Schule als Kosinus und Sinus kennengelernt haben. Zur Frage, warum es sich tatsächlich um diesselben Funktionen handelt, die Sie aus der Schule kennen, kommen wir später in diesem Abschnitt noch.

Aus obiger Definition erhält man sofort die folgenden Darstellung der Exponentialfunktion:

Proposition 5.6.2. *Der Kosinus und der Sinus haben die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z).$$

(b) *Die Funktionen* $\cos, \sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sind beliebig oft differenzierbar. Es gil* $\cos' = -\sin$ *und* $\sin' = \cos$.

(c) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\cos(x) = \operatorname{Re}\big(\exp(\mathrm{i}x)\big) \qquad \textit{und} \qquad \sin(x) = \operatorname{Im}\big(\exp(\mathrm{i}x)\big).$$

Insbesondere bilden Kosinus und Sinus reelle Zahlen auf reelle Zahlen ab.

(d) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt* $\cos(x) \in [-1, 1]$ *und* $\sin(x) \in [-1, 1]$.

Beweis. (a) Das folgt direkt aus Definition 5.6.1.

(b) Das folgt ebenfalls aus Definition 5.6.1.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \frac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}x) + \exp(-\mathrm{i}x)\big)\\ &\overset{x\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}x) + \exp(\overline{\mathrm{i}x})\big) = \frac{1}{2}\big(\exp(\mathrm{i}x) + \overline{\exp(\mathrm{i}x)}\big) = \operatorname{Re}\exp(\mathrm{i}x).\end{aligned}$$

Ein analoges Argument zeigt die Behauptung für den Sinus.

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt laut (c) $\sin(x) \in \mathbb{R}$. Außerdem ist

$$|\cos(x)| = \big|\operatorname{Re}\big(\exp(\mathrm{i}x)\big)\big| \le |\exp(\mathrm{i}x)| \overset{\text{Theorem 5.3.2(f)}}{=} 1$$

und somit $\cos(x) \in [-1, 1]$. Analog kann man die Behauptung für den Sinus zeigen. □

Nun wollen wir besprechen, wie die Graphen des Kosinus und des Sinus aussehen (genauer: wie die Graphen Ihrer Einschränkungen auf $\mathbb{R}$ aussehen). Dazu benötigen wir das folgende Resultate über das Verhalten der Exponentialfunktion entlang der imaginären Achse.

Theorem 5.6.3 (Periodizität der Exponentialfunktion entlang von $\mathbf{i}\mathbb{R}$)**.**

(a) *Es gibt eine kleinste Zahl* $\tau \in (0, \infty)$ *mit der Eigenschaft* $\exp(\mathrm{i}\tau) = 1$.

(b) *Für alle* $t \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp\big(\mathrm{i}(\tau + t)\big) = \exp(\mathrm{i}t)$.

(c) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(\mathrm{i}x) = 1$ *genau dann, wenn es ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $x = k\tau$ *gibt.*

(d) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(\mathrm{i}x) = -1$ *genau dann, wenn es ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $x = (k + \frac{1}{2})\tau$ *gibt.*

Beweis. (a) und (b) Das wurde auf Hausaufgabenblatt 10 in den Bonusaufgaben 6(h) und (i) bewiesen.

(c) “$\Leftarrow$“ Diese Implikation folgt sofort aus (a) und (b).

“$\Rightarrow$” Falls $x > 0$ ist, kann man folgendermaßen vorgehen: Sei k die größte Zahl in $\mathbb{N}_0$ mit der Eigenschaft $x - k\tau \ge 0$.[23] Dann ist $x - k\tau \in [0, \tau)$ und es gilt $\exp(\mathrm{i}(x - k\tau)) = \exp(\mathrm{i}x) = 1$. Wegen der Minimalität von τ folgt $x - k\tau = 0$, also $x = k\tau$.

Falls $x < 0$ ist, wendet man dasselbe Argument auf $-x$ an.

(d) Zunächst beobachten wir, dass $\big(\exp(\mathrm{i}\frac{\tau}{2})\big)^2 = \exp(\mathrm{i}\tau) = 1$ gilt, also ist die komplexe Zahl $\exp(\mathrm{i}\frac{\tau}{2})$ entweder gleich -1 oder gleich 1. Wegen der Minimalität von τ kann man den zweitgenannten Fall aber ausschließen, also ist $\exp(\mathrm{i}\frac{\tau}{2}) = -1$.

Nun folgt die Behauptung leicht aus (c). □

[23] Es gibt es größte solche Zahl wegen des Archimedischen Axioms.

Definition 5.6.4 (Kreiskonstante und $\boldsymbol{\pi}$)**.** Für die Zahl τ aus Theorem 5.6.3(a) definiert man Man definiert

$$\pi := \frac{\tau}{2}.$$

Man nennt π die **Kreiskonstante** oder die **Kreiszahl**.[24]

Vorlesung 24 (Fr, 17.01.) beginnt mit Korollar 5.6.5.

Korollar 5.6.5 (Kurvendiskussion des reellen Kosinus und Sinus)**.** *Die Funktionen*[25] $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *haben die folgenden Eigenschaften:*

(a) *Beide Funktionen sind* 2π*-periodisch, das heißt, es gilt*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \textit{und} \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

(c) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\cos(x) = 0$ *genau dann, wenn es ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $x = (k + \frac{1}{2})\pi$ *gibt.*

(d) *Für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(x) = 0$ *genau dann, wenn es ein* $k \in \mathbb{Z}$ *mit* $x = k\pi$ *gibt.*

(e) *Es gilt* $\cos(x) \geq 0$ *für* $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ *und* $\cos(x) \leq 0$ *für* $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$.

(f) *Es gilt* $\sin(x) \geq 0$ *für* $x \in [0, \pi]$ *und* $\sin(x) \leq 0$ *für* $x \in [\pi, 2\pi]$.

(g) *Im Intervall* $[0, 2\pi)$ *nimmt* $\cos$ *genau an der Stelle* 0 *den Wert* 1 *an und genau der Stelle* π *den Wert* -1.

(h) *Im Intervall* $[0, 2\pi)$ *nimmt* $\cos$ *genau an der Stelle* $\frac{\pi}{2}$ *den Wert* 1 *an und genau der Stelle* $\frac{3}{2}\pi$ *den Wert* -1.

(i) *Es gilt* $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ *für alle* $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x + 2\pi) = \cos(x + \tau) = \operatorname{Re}\exp\big(\mathrm{i}(x + \tau)\big) = \operatorname{Re}\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x).$$

Analog argumentiert man für den Sinus.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = (\operatorname{Re}\exp(\mathrm{i}x))^2 + (\operatorname{Im}\exp(\mathrm{i}x))^2 = |\exp(\mathrm{i}x)|^2 = 1^2 = 1.$$

[24] Es gibt übrigens gute Argumente, warum es deutlich sinnvoller wäre, viele Formeln mit Hilfe der Zahl τ statt mit Hilfe der Zahl π auszudrücken. Wer Spaß an Abschweifungen hat, kann hier eine Auflistung und Erläuterung solcher Argumente finden: `https://tauday.com/tau-manifesto`. Für den mathematischen Inhalt spielt diese Diskussion aber natürlich keine Rolle.

[25] Eigentlich müsste man hier etwas genauer sein und $\cos|_{\mathbb{R}}$ und $\sin|_{\mathbb{R}}$ schreiben. Macht man meistens aber eher nicht.

(d) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
& \sin(x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \operatorname{Im}\exp(\mathrm{i}x) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \exp(\mathrm{i}x) \in \{-1, 1\} \\
\overset{\text{Thm. 5.6.3(d), (d)}}{\Leftrightarrow}\quad & \exists k \in \mathbb{R}: \quad x = k\tau \ \vee\ x = (k + 1/2)\tau \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{R}: \quad x = 2k\pi \ \vee\ x = (2k+1)\pi \\
\Leftrightarrow\quad & \exists k \in \mathbb{R}: \quad x = k\pi.
\end{aligned}
$$

(f) Weil sin stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz und aus (d), dass sin auf $(0, \pi)$ das Vorzeichen nicht wechselt und auf $(\pi, 2\pi)$ ebenfalls das Vorzeichen nicht wechselt.

Wegen $\sin'(0) = \cos(0) = 1 > 0$, ist $\sin(x) > 0$ für alle x, die rechts von 0 und nahe genug bei 0 liegen. Somit ist $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$.

Außerdem gilt wegen $\sin'(2\pi) = \sin'(0) = 1 > 0$, dass $\sin(x) < 0$ ist für alle x, die links von 2π und nahe genug bei 2π liegen. Somit folgt $\sin(x) < 0$ für alle $x \in (\pi, 2\pi)$.

(i) Wir zeigen zunächst, dass $\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}) = \mathrm{i}$ ist. Es gilt $\big(\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2})\big)^2 = \exp(\mathrm{i}\pi) = \exp(\mathrm{i}\frac{\tau}{2}) = -1$, wobei die letzte Gleichheit aus Theorem (d) folgt. Somit ist $\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2})$ gleich i oder gleich $-\mathrm{i}$. Wegen (f) ist $\operatorname{Im}\big(\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2})\big) = \sin(\frac{\pi}{2}) \geq 0$, also gilt $\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2}) = \mathrm{i}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt somit

$$
\begin{aligned}
\sin(x + \frac{\pi}{2}) &= \operatorname{Im}\Big(\exp\big(\mathrm{i}(x + \frac{\pi}{2})\big)\Big) = \operatorname{Im}\big(\exp(\mathrm{i}x)\exp(\mathrm{i}\frac{\pi}{2})\big) \\
&= \operatorname{Im}\big(\exp(\mathrm{i}x)\cdot\mathrm{i}\big) = \operatorname{Re}\big(\exp(\mathrm{i}x)\big) = \cos(x).
\end{aligned}
$$

(c) und (e) Diese Resultate folgen aus den analogen Resultaten für den Sinus ((d) und (f)), der 2π-Periodizität (siehe (a)) und der Darstellung des Kosinus als verschobener Sinus in (i).

(g) Sei $x \in [0, 2\pi)$. Es ist $|\cos(x)| = 1$ äquivalent zu $\cos(x)^2 = 1$ und wegen (b) ist dsas wiederum äquvialenz zu $\sin(x) = 0$. Dies ist laut (d) genau dann der Fall, wenn $x = 0$ oder $x = \pi$ ist. Mit der Information über das Vorzeichen von cos aus (e) folgt die Behauptung.

(h) Analog zu (g). □

Beachten Sie, dass wir wegen $\cos' = -\sin$ und $\sin' = \cos$ aus den Vorzeicheninformationen in Theorem 5.6.5(e) und (f) Informationen über das Monotonieverhalten von cos und sin erhalten:

- cos ist auf $[0, \pi]$ monoton fallend und auf $[\pi, 2\pi]$ monoton steigend.
- sin ist auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ monoton steigend, auf $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$ monoton fallend, und auf $[\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ monoton steigend.

Ebenso kann man such mit Hilfe der Information $\cos'' = -\cos$ und $\sin'' = -\sin$ überlegen, auf welchen Teilintervallen cos und sin konvex sind und auf welchen Teilintervallen sie konkav sind.

Diskussion 5.6.6 (Die geometrische Bedeutung der trigonometrischen Funktionen)**.** Für jedes $x \in [0, 2\pi)$ ist

$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

eine Zahl im komplexen Einheitskreis. Mit Hilfe des soeben besprochenen Vorzeichen- und Monotonieverhaltens kann man sich überlegen, dass $\exp(\mathrm{i}x)$ den Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn durchläuft, wenn x von 0 bis 2π läuft.

Die genaue geometrische Bedeutung von x ist dabei folgendermaßen: In der Analysis 2 werden wir besprechen, wie man die Längen von Kurven in der Ebene (und im Raum und allgemein im $\mathbb{R}^n$) mit Hilfe von Integralrechnung bestimmen kann. Dann werden wir ausrechnen, dass die Länge der Kurve, die von der Abbildung $x \mapsto \exp(i\mathrm{i})$ auf einem Intervall der Form $[0, x]$ durchlaufen wird, genau gleich x ist. Das bedeutet, dass die komplexe Zahl $\exp(\mathrm{i}x)$ genau den Winkel x mit der reellen Achse einschließt.

5.7 Addendum: Technische Details zur Taylorentwicklung

In diesem Abschnitt beweisen wir Theorem 5.4.3.

Lemma 5.7.1. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$, sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und seien $g, e : I \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = e(x)(x - x_0)^k$ für alle $x \in I$. Es sei $e(x_0) = 0$ und die Funktion g sei $(k+1)$-mal differenzierbar mit $g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(k)}(x_0) = 0$. Dann ist e differenzierbar mit $e'(x_0) = \frac{g^{(k+1)}(x_0)}{(k+1)!}$*

Beweis. Indem wir die gesamte Situation um $-x_0$ verschieben, können wir annehmen, dass $x_0 = 0$ gilt; das erleichtert die Notation ein wenig. Wegen $e(x) = \frac{g(x)}{x}$ für alle $x \in I \setminus \{0\}$ ist e in jedem Punkt $x \in I \setminus \{0\}$ differenzierbar.[26] Wir müssen also zeigen, dass e in 0 differenierbar ist und die behauptete Formel erfüllt.

Hierfür sehen wir zunächst den Fall an, in dem zusätzlich $g^{(k+1)}(0) = 0$ gilt.

Lassen Sie uns ein $x \in I \setminus \{0\}$ betrachten. Wir zeigen nun, dass es für jedes $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ ein $x_j \in I \setminus \{0\}$ mit $|x_j| \le |x|$ und $\left|\frac{g(x)}{x^j}\right| \le \left|g^{(j)}(x_j)\right|$ gibt. Dies zeigen wir per Induktion über j:

Für $j = 0$ können wir einfach $x_0 := x$ wählen. Sei die Behauptung nun für ein $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ und alle Punkte in $I \setminus \{0\}$ bereits beweisen. Weil $g^{(j)}$ differenzierbar ist, gibt es aufgrund des Mittelwertsatzes ein x_{j+1}, dass strikt zwischen 0 and x_j

[26] Hier fehlen einige Details. Können Sie das Argument im Detail ausführen?

liegt – das heißt, es gilt $0 < |x_{j+1}| < |x_j| \leq |x|$ – und für welches

$$\frac{g^{(j)}(x_j)}{x_j} = \frac{g^{(j)}(x_j) - g^{(j)}(0)}{x_j - 0} = g^{(j+1)}(x_{j+1})$$

erfüllt. Damit gilt laut Induktionsvoraussetzung

$$\left|\frac{g(x)}{x^{j+1}}\right| \leq \frac{\left|g^{(j)}(x_j)\right|}{|x|} \leq \left|g^{(j+1)}(x_{j+1})\right|.$$

Damit ist für jedes $x \in I \backslash \{0\}$ die Existenz der Punkte $x_0, \ldots, x_k$ bewiesen. Für $x \to 0$ gilt wegen $|x_k| \leq |x|$ auch $x_k \to 0$. Somit erhalten für den Differenzenquotienten von e an der Stelle 0

$$\begin{aligned}\left|\frac{e(x) - e(0)}{x - 0}\right| &= \left|\frac{g(x)}{x^{k+1}}\right| = \frac{\left|g^{(k)}(x_k)\right|}{x} \\ &= \left|\frac{g^{(k)}(x_k)}{x_k}\right| \left|\frac{x_k}{x}\right| \leq \left|\frac{g^{(k)}(x_k)}{x_k}\right| \overset{x \to 0}{\to} \left|g^{(k+1)}(0)\right| = 0.\end{aligned}$$

Damit ist $\left|\frac{e(x)-e(0)}{x-0}\right| \to 0$ für $x \to 0$ gezeigt, das heißt, e tatsächlich differenzierbar in 0 mit $e'(0) = 0$.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall, in dem nicht unbedingt $g^{(k+1)}(0) = 0$ sein muss. In diesem Fall definieren wir eine neue Funktion $\tilde{g} : I \to \mathbb{R}$ durch $\tilde{g}(x) := g(x) - \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(0) x^{k+1}$ für alle $x \in I$. Dann ist $\tilde{g}$ ebenfalls $(k+1)$-mal differenzierbar und es gilt $\tilde{g}^{(k+1)}(0) = 0$. Außerdem gilt

$$\tilde{g}(x) = e(x)x^k - \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(0) x^{k+1} = \tilde{e}(x) x^k$$

für alle $x \in I$, wobei wir $\tilde{e}(x) := e(x) - \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(0) x$ für alle $x \in I$ setzen. Nun erfüllen $\tilde{g}$ und $\tilde{e}$ ebenfalls die Voraussetzungen des Lemmas: Es gilt $\tilde{e}(0) = 0$ und die 0-te bis k-te Ableitung von $\tilde{g}$ verschwindet im Punkt 0. Außerdem ist auch $\tilde{g}^{(k+1)}(0) = 0$, also können wir den bereits gezeigten Spezialfall des Lemmas anwenden und erhalten somit, dass $\tilde{e}$ differenzierbar ist mit $\tilde{e}'(0) = 0$. Somit ist e ebenfalls differenzierbar mit $e'(0) = \frac{1}{(k+1)!} g^{(k+1)}(0)$, wie behauptet. □

Beweis von Theorem 5.4.3. Wir zeigen die Behauptung per Induktion über n.

Für $n = 1$ haben wir die Behauptung bereits in Proposition 5.1.4 gezeigt. Nehmen wir nun an, dass die Behauptung für ein festes $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen ist und dass f sogar $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Laut Induktionshypothese gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + e_n(z)(z - z_0)^n \tag{5.7.1}$$

für alle $z \in I$ und für ein stetiges $e_n : I \to \mathbb{R}$ mit $e_n(z_0) = 0$. Definiere nun $g : I \to \mathbb{R}$ durch

$$g(z) := f(z) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = e_n(z)(z - z_0)^n$$

für alle $z \in I$. Die Funktion g ist $(n+1)$-mal differenzierbar mit $g^{(0)}(z_0) = \cdots = g^{(n)}(z_0) = 0$ sowie $g^{(n+1)}(z_0) = f^{(n+1)(z_0)}$. Laut Lemma 5.7.1 folgt, dass e_n differenzierbar ist mit $e_n'(z_0) = \frac{g^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}$.

Nun wenden wir Proposition 5.1.4 (das heißt, die Taylor-Entwicklung von Ordnung 1) auf die Funktion e_n an. Laut dieser Proposition gibt es eine stetige Funktion $e_{n+1} : I \to \mathbb{R}$ mit $e_{n+1}(z_0) = 0$ und mit

$$\begin{aligned} e_n(z) &= e_n(z_0) + e_n'(z_0)(z - z_0) + e_{n+1}(z)(z - z_0) \\ &= \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0) + e_{n+1}(z)(z - z_0) \end{aligned}$$

für alle $z \in I$.

Einsetzen dieser Formel in (5.7.1) liefert die Behauptung. □

Kapitel 6

Integralrechnung

6.1 Das Riemann-Integral

Definition 6.1.1 (Partitionen von Intervallen)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$.

(a) Unter einer **Partition** p des Intervalls $[a, b]$ versteht man ein Tupel aus Zahlen $p = (p_0, p_1, \ldots, p_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$, für das $a = p_0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_n = b$ gilt. Für die Zahl n in Abhängigkeit von p verwenden wir die Notation $n := n(p) \in \mathbb{N}$.[1]

Die **Gitterweite** oder **Feinheit** dieser Partition definieren wir als die Zahl

$$|p| := \max \left\{ p_k - p_{k-1} \mid k \in \{1, \ldots, n\} \right\} \in [0, \infty).$$

(b) Sei p eine Partition von $[a, b]$. Eine **Punktierung** von p ist eine Tupel $q = (q_1, \ldots, q_{n(p)})$ mit der Eigenschaft

$$p_0 \leq q_1 \leq p_1 \leq q_2 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_{n-1} \leq q_n \leq p_n.$$

Definition 6.1.2 (Riemannsumme)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Sei p eine Partition von $[a, b]$ und q eine Punktierung von p. Die Zahl

$$\mathrm{R}(f, p, q) := \sum_{k=1}^{n(p)} (p_k - p_{k-1}) f(q_k)$$

nennt man die **Riemann-Summe** von f, die zur Partition p und Punktierung q gehört.

Definition 6.1.3 (Riemann-Integrierbarkeit und Riemmann-Integral)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. Man nennt f **Riemann-integrierbar**, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft gibt:

Vorlesung 25 (Mi, 22.01.) beginnt mit Definition 6.1.3

[1] Das ist praktisch, wenn wir nur das Symbol p zur Verfügung haben und notationell direkt auf die Anzahl der Elemente von p “zugreifen” wollen.

Für jede Folge von Partitionen $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ mit $|p_\ell| \overset{\ell\to\infty}{\to} 0$ und jede Folge $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von zugehörigen Punktierungen gilt

$$\mathrm{R}(f,p_\ell,q_\ell) \overset{\ell\to\infty}{\to} r.$$

In diesem Fall nennt man r das **Riemann-Integral** von f (über dem Intervall $[a,b]$) und schreibt $r =: \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.[2]

Man verwendet in diesem Fal auch die Notation $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Tatsächlich muss man in der Definition des Riemann-Integrals gar nicht voraussetzen, dass der Grenzwert r für alle Folgen $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ derselbe ist, denn das folgt automatisch:

Lemma 6.1.4 (Konverenz der Riemann-Summen impliziert Gleichheit der Grenzwerte)**.** *Seien $a,b\in\mathbb{R}$ mit $a\le b$ und sei $f:[a,b]\to\mathbb{C}$. Für jede Folge von Partitionen $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von $[a,b]$ mit $|p_\ell| \overset{\ell\to\infty}{\to} 0$ und jede Folge $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von zugehörigen Punktierungen sei die Folge*

$$\Big(\mathrm{R}(f,p_\ell,q_\ell)\Big)_{\ell\in\mathbb{N}}$$

konvergent gegen eine Zahl in $\mathbb{C}$. Dann ist der Grenzwert für all solche Folgen $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ derselbe, das heißt f it Riemann-integrierbar.

Beweis. Betrachten wir zwei Folgen $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{p}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von Partitionen von $[a,b]$, deren Feinheit gegen 0 konvergiert, und zwei Folgen $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ von zugehörigen Punktierungen. Seien $r,\tilde{r}\in\mathbb{C}$ die Grenzwerte der zugehörigen Folgen von Riemann-Summen. Dann ist

$$\big(p_1,\tilde{p}_1,p_2,\tilde{p}_2,\dots\big)$$

ebenfalls eine Folge von Partitionen von $[a,b]$, deren Feinheit gegen 0 konvergiert, und

$$\big(q_1,\tilde{q}_1,q_2,\tilde{q}_2,\dots\big)$$

eine Folge von zugehörigen Punktierungen. Laut Voraussetzung konvergiert somit die Folge

$$\Big(\mathrm{R}(f,p_1,q_1),\mathrm{R}(f,\tilde{p}_1,\tilde{q}_1),\mathrm{R}(f,p_2,q_2),\mathrm{R}(f,\tilde{p}_2,\tilde{q}_2),\dots\Big)$$

gegen eine Zahl $\hat{r}\in\mathbb{C}$. Weil $\big(\mathrm{R}(f,p_\ell,q_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ und $\big(\mathrm{R}(f,\tilde{p}_\ell,\tilde{q}_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ Teilfolgen dieser Folgen sind, konvergieren sie ebenfalls gegen $\hat{r}$. Also ist $r=\hat{r}=\tilde{r}$. □

Proposition 6.1.5 (Eigenschaften des Riemann-Integrals)**.** *Seien $a,b,c\in\mathbb{R}$ mit $a\le b$ und seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{C}$ Riemann-integrierbar.*

[2] Weshalb ist r eindeutig bestimmt?

(a) *Es ist auch* $f+g$ *Riemann-integrierbar und es gilt* $\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) *Sei* $\alpha \in \mathbb{C}$. *Es ist auch* αf *Riemann-integrierbar und es gilt* $\int_a^b (\alpha f)(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

(c) *Für alle* $c, d \in [a, b]$ *mit* $c < d$ *ist auch die Einschränkung* $f|_{[c,d]}$ *Riemann integrierbar.*

(d) *Für alle* $t_1, t_1, t_3 \in [a, b]$ *gilt* $\int_{t_1}^{t_3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_2}^{t_3} f(x)\,\mathrm{d}x$.[3]

(e) *Jedes Funktion* $h : [a, a] \to \mathbb{C}$ *ist Riemann-integrierbar mit* $\int_a^a h(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Beweis. (a), (b) und (e) Die Aussage kann man leicht aus Definition 6.1.3 herleiten.

(c) und (d) Hierzu verwendet man Definition 6.1.3 und, für (c), auch Lemma 6.1.4. Wir verzichten an dieser Stelle auf die etwas technischen Details, weisen aber darauf hin, dass für den Fall, dass man die Aussage zuerst für den Fall $t_1 \le t_2 \le t_3$ beweist, und die anderen Fälle dann darauf zurückführt. □

Theorem 6.1.6 (Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar)**.** *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a \le b$ *und sei* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann ist* f *Riemann-integrierbar.*

Beweis. Falls $a = b$ ist, folgt die Behauptung aus Proposition 6.1.5(e), also sei für den Rest des Beweises $a < b$.

Sei $(p_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von $[a, b]$ mit $|p_\ell| \overset{\ell\to\infty}{\to} 0$ und sei $(q_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Folge von zugehörigen Punktierungen. Wir zeigen, dass $\big(\mathrm{R}(f, p_\ell, q_\ell)\big)_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ ist; wegen Theorem 3.5.3 ist sie dann konvergent und damit folgt aus Lemma 6.1.4 die Riemann-Integrierbarkeit von f. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig, fest.

Da $[a, b]$ beschränkt und abgeschlossen ist, ist die stetige Funktion f laut Theorem 3.3.8 sogar gleichmäßig stetig, das heißt es gibt ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ die folgende Implikation gilt:

$$|x_2 - x_1| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Wir betrachten nun zunächst zwei Partitionen $p, \hat{p}$ von $[a, b]$ mit zugehörigen Punktierungen $q, \hat{q}$, wobei $|p| < \delta$ gelte und jeder Punkt p_k aus p auch in der Partition $\hat{p}$ vorkomme, und zwar mindestens so oft wie in p. Dann gibt es Zahlen $0 = m_0 < \cdots < m_{n(p)} = n(\hat{p})$ mit $p_k = \hat{p}_{m(k)}$ für alle $k \in \{0, \ldots, n(p)\}$. Somit ist

Vorlesung 26 (Fr, 24.01.) beginnt im Beweis von Theorem 6.1.6 (wir hatten am Mittwoch an einer Stelle im Beweis aufgehört)

$$|\mathrm{R}(f, \hat{p}, \hat{q}) - \mathrm{R}(f, p, q)| = \left| \sum_{k=1}^{n(p)} f(q_k)(p_k - p_{k-1}) - \sum_{j=1}^{n(\hat{p})} f(\hat{q}_j)(\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) \right|$$

[3] Beachten Sie, dass wir hier nicht vorausgesetzt haben, dass $t_1 \le t_2 \le t_3$ gilt.

$$
\begin{aligned}
&= \left| \sum_{k=1}^{n(p)} \Big(f(q_k)(p_k - p_{k-1}) - \sum_{j=m(k-1)+1}^{m(k)} f(\hat{q}_j)(\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) \Big) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{n(p)} \Big(\sum_{j=m(k-1)+1}^{m(k)} f(\hat{q}_k)(\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) \ - \sum_{j=m(k-1)+1}^{m(k)} f(\hat{q}_j)(\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) \Big) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n(p)} \sum_{j=m(k-1)+1}^{m(k)} \left| f(q_k) - f(\hat{q}_j) \right| (\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n(p)} \sum_{j=m(k-1)+1}^{m(k)} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) \\
&= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n(\hat{p})} (\hat{p}_j - \hat{p}_{j-1}) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (\hat{p}_{n(\hat{p})} - \hat{p}_0) = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Wenn wir nun zwei beliebige Partitionen $p, \tilde{p}$ von $[a,b]$ mit zugehörigen Punktierungen $q, \tilde{q}$, und mit $|p|, |\tilde{p}| < \delta$ betrachten, dann können wir eine weitere Partition $\hat{p}$ mit zugehöriger Punktierung $\hat{q}$ konstruieren derart, dass jeder Punkt p_k aus p und jeder Punkt $\tilde{p}_k$ aus $\tilde{p}$ auch in der Partition $\hat{p}$ vorkomme, und zwar mindestens so oft wie in p beziehungsweise in $\tilde{p}$. Aus der vorangehenden Abschätzung folgt somit

$$
|\mathrm{R}(f, \tilde{p}, \tilde{q}) - \mathrm{R}(f, p, q)| \leq |\mathrm{R}(f, \tilde{p}, \tilde{q}) - \mathrm{R}(f, \hat{p}, \hat{q})| + |\mathrm{R}(f, \hat{p}, \hat{q}) - \mathrm{R}(f, p, q)| < 2\varepsilon.
$$

Aus dieser Ungleichung erhält man sofort: Wenn $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partionen von $[a,b]$ ist mit $|p_n| \to 0$ für $n \to \infty$ und wenn $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von zugehörigen Partitionen ist, dann ist $\big(\mathrm{R}(f, p_n, q_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent. Aus Lemma 6.1.4 folgt somit, dass f Riemann-integrierbar ist. □

Lassen Sie uns, bevor wir die Theorie weiterentwickeln, ein möglichst einfaches Beispiel betrachten.

Beispiel 6.1.7 (Riemann-Integral der Funktion $\boldsymbol{x \mapsto x}$)**.** Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Dann ist f stetig und somit laut Theorem 6.1.6 Riemann-integrierbar. Wir wollen nun das Integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ berechnen.[4] Laut Definition 6.1.3 können wir dafür irgend eine Folge $(p_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ von Partitionen von $[0,1]$ mit $|p_\ell| \to 0$ für $\ell \to \infty$ und eine Folge von zugehörigen Punktierungen $(q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ wählen und erhalten dann

$$
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\ell \to \infty} \mathrm{R}(f, p_\ell, q_\ell).
$$

Lassen Sie uns, die Rechnungen einfach zu halten, für jedes $\ell \in \mathbb{N}$ die Partition

$$
p_\ell := (0, \frac{1}{\ell}, \frac{2}{\ell}, \ldots, \frac{\ell-1}{\ell}, 1)
$$

[4]Anschaulich ist natürlich klar, dass das Ergebnis $\frac{1}{2}$ sein sollte. Aber wir wollen nun nachprüfen, dass man mit der Definition des Riemann-Intregrals tatsächlich zum selben Ergebnis kommt.

wählen.[5] Damit ist also $n(p_\ell) = \ell$ und $(p_\ell)_k = \frac{k}{\ell}$ für alle $k \in \{0, 1, \dots, \ell)$. Für jedes $k \in \{1, \dots, \ell\}$ können wir $(q_\ell)_k$ zum Beispiel als rechten Randpunkt des Intervall $[(p_\ell)_{k-1}, (p_\ell)_k]$ – also als $(q_\ell)_k \coloneqq (p_\ell)_k = \frac{k}{\ell}$ – wählen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\ell\to\infty} \mathrm{R}(f, p_\ell, q_\ell) \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{n(p_\ell)} \big((p_\ell)_k - (p_\ell)_{k-1}\big) f\big((q_\ell)_k\big) \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \sum_{k=1}^{\ell} \big(\frac{k}{\ell} - \frac{k-1}{\ell}\big)\frac{k}{\ell} \\
&= \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell^2} \sum_{k=1}^{\ell} k = \lim_{\ell\to\infty} \frac{\ell(\ell+1)}{2\ell^2} = \lim_{\ell\to\infty} \big(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\ell}\big) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts diskutieren wir noch eine Funktion, die nicht Riemann-integrierbar ist.

Beispiel 6.1.8 (Eine Funktion, die nicht Riemman-integrierbar ist)**.** Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann ist f nicht Riemann integrierbar.

Beweis. Wenn man der Idee aus Aufgabe 3 auf Hausaufagbenblatt 13 folgt, kann man eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Partionen von $[0,1]$ mit $|p_n| \to 0$ für $n \to \infty$ sowie zwei Folgen von zugehörigen Punktierungen $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\tilde{q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstruieren derart, dass $\mathrm{R}(f, p_n, q_n) = 1$ und $\mathrm{R}(f, p_n, \tilde{q}_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

6.2 Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung

Definition 6.2.1 (Stetige Differenzierbarkeit)**.** Sei $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{C}$ eine Menge ohne isolierte Punkte. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{C}$ heißt **stetig differenzierbar** oder eine $\boldsymbol{C^1}$**-Funktion**, falls sie differenzierbar ist und ihre Ableitung $f'\colon M \to \mathbb{C}$ stetig ist.

Vorlesung 27 (Mi, 29.01.) beginnt mit Definition 6.2.1

Achtung! Beachten Sie unbedingt: Jede differenzierbare Funktion f ist laut Korollar 5.1.5 stetig. **Stetige Differenzierbarkeit** von f bedeutet, dass zusätzlich auch noch die Ableitung von f stetig ist! Das folgende Beispiel zeigt, dass es differenzierbare Funktionen gibt, deren Ableitung nicht stetig ist:

[5] Naheliegeneder Weise nennt man diese Partition **äquidistant**.

Beispiel 6.2.2 (Eine differenzierbare Funktion mit unstetiger Ableitung)**.** Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \in (0,\infty), \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Weil die Einschränkung $f|_{(0,\infty)}$ differenzierbar ist und $(0,\infty)$ ein offenes Intervall ist, ist f in jedem $x \in (0,\infty)$ differenzierbar[6] mit Ableitung

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Außerdem ist f im Punkt 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$, denn für $w \in (0,\infty)$ gilt

$$\frac{f(w) - f(0)}{w - 0} = w \sin\left(\frac{1}{w}\right) \overset{w \to 0}{\to} 0.$$

In diesem Abschnitt besprechen wir zwei Theorem, die zeigen, dass es einen sehr engen Zusammenhang zwischen Differentialrechnung und Integralrechnung gibt – die Theorem 6.2.3 und 6.2.4. Sie sind für das Verständnis und für die Anwendung der Differential- und Integralrechnung so entscheidend, dass man sie meist als *Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung* bezeichnet.[7]

Theorem 6.2.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 1. Teil)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei $f := F' : I \to \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s = F(t) - F(t_0) \tag{6.2.1}$$

für alle $t_0, t \in I$.

Um zu verstehen, weshalb Theorem 6.2.3 stimmt, sind die folgenden vier Überlegungen nützlich:

(1) Zuerst überlegen wir uns, dass das Integral, das in der Gleichung (6.2.1) auftaucht, überhaupt definiert ist. Das liegt daran, dass die Funktion f laut Voraussetzung stetig ist – somit ist sie laut Theorem 6.1.6 über jedem abgeschlossenen, beschränkten Intervall Riemann-integrierbar.

(2) Als zweites sehen wir uns an, wie die beiden Punkte t und t_0, die in der Gleichung (6.2.1) vorkommen, relativ zu einander liegen.

    Falls $t = t_0$ gilt, ist leicht zu sehen, dass die Gleichung (6.2.1) stimmt (wieso?). Und falls wir die Gleichung (6.2.1) im Fall $t > t_0$ beweisen können, dann folgt

[6] Können Sie dieses Argument mit Detail ausführen?

[7] Manche Autorinnen und Autoren fassen die beiden Sätze als Teilaussagen eines einzelnen Satzes zusammen und sprechen deshalb nur von *dem* Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (im Singular).

aus Definition 6.1.3, dass sie auch für den Fall $t < t_0$ gilt (können Sie dieses Argument im Detail ausführen?).

Der eigentliche Punkt ist also, dass wir die Gleichung (6.2.1) im Fall $t > t_0$ beweisen müssen. (Es ist trotzdem gut, die Gleichung auch für die anderen Fälle im Satz zu haben; das erleichtert später die Anwendbarkeit des Satzes.)

(3) Jetzt betrachten wir zwei Zahlen t, t_0, für die $t > t_0$ gilt. Wir überlegen uns nun anhand einer groben Beweisskizze, weshalb der Satz in diesem Fall (in etwa) stimmt.

Dazu unterteilen wir das Intervall $[t_0, t]$ in n gleich lange Teilintervall mit den Randpunkten $t_0 < t_1 < \cdots < t_n := t$. Lassen uns im Moment noch nicht genau spezifizieren, wie groß n ist – aber wir wollen es uns als sehr große Zahl vorstellen und entsprechend ist die Länge $\ell := \frac{t-t_0}{n}$ der Teilintervalle $[t_0, t_1)$, $[t_1, t_2)$, …, $[t_{n-1}, t_n)$ sehr klein.

Das Integral $\int_{t_0} f(s)\,\mathrm{d}s$ ist deshalb fast gleich der Riemann-Summe

$$S := \sum_{k=0}^{n-1} \ell f(t_k). \tag{6.2.2}$$

Lassen Sie uns das mit der Notation $\int_{t_0} f(s)\,\mathrm{d}s \simeq S$ ausdrücken.[8] Jetzt machen wir noch eine zweite Näherung: Da die Punkte t_k und t_{k+1} für jedes $k \in \{1, \dots, n-1\}$ sehr nahe beieinander liegen, sie für jedes solche k die Ableitung $f(t_k) = F'(t_k)$ ungefähr gleich groß, wie der Differenzenquotient $\frac{F(t_{k+1})-F(t_k)}{t_{k+1}-t_k} = \frac{F(t_{k+1})-F(t_k)}{\ell}$. Also ist S in etwas gleich große wie die Summe

$$D := \sum_{k=0}^{n-1} \ell \frac{F(t_{k+1}) - F(t_k)}{\ell}, \tag{6.2.3}$$

das heißt, es gilt $S \simeq D$. Insgesamt ist also $\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s \simeq S \simeq D$.

Die Summe D kann man leicht ausrechnen: Das ℓ innerhalb der Summe kürzt sich und es bleibt dann nur eine Teleskopsumme stehen – somit erhält man $D = F(t_n) - F(t_0) = F(t) - F(t_0)$. Also erhalten wir insgesamt $\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s \simeq F(t) - F(t_0)$.

(4) Zuletzt müssen wir uns überlegen, wie man die Beweisskizze in Punkt (1) zu einem vollständigen Beweis ausbauen kann. In der Beweisskizze gibt es zwei Probleme: Zum einen haben wir lediglich erhalten, dass $\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s$ ungefähr gleich $F(t) - F(t_0)$ ist – aber die Behauptung des Satzes lautet ja, dass die beiden Zahlen genau gleich sind. Zum anderen haben wir mehrmals das Symbol

[8] Beachten Sie aber bitte, dass $\simeq$ hier kein präzise definiertes mathematisches Symbol ist. Wir verwenden es nur um die Grobe Idee auszudrücken, dass das Integral und S "in etwas gleich groß sind".

$\simeq$ benutzt – aber es ist ja gar nicht klar, was genau dieses Symbol eigentlich bedeuten soll.[9]

Wir geben nun einen vollständigen Beweis von Theorem 6.2.3, in dem wir diese Probleme lösen.

Beweis von Satz 6.2.3. Wie in Punkt (2) vor dem Beweis besprochen, müssen wir den Satz nur für den Fall $t > t_0$ bewiesen. Seien also $t_0, t \in I$ mit $t > t_0$.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, fest. Wir zeigen, dass beide Seiten der behaupteten Gleichung (6.2.1) sich höchstens um 2ε unterscheiden; weil $\varepsilon > 0$ beliebig ist, folgt daraus die Gleichheit.

Da die Funktion F stetig differenzierbar ist, kann man beweisen, dass sie auf dem Intervall $[t_0, t]$ sogar **gleichmäßig differenzierbar** ist, das heißt, dass es ein $\delta > 0$ gibt derart, dass

$$\left| \frac{F(s) - F(r)}{s - r} - f(r) \right| < \frac{\varepsilon}{t - t_0} \tag{6.2.4}$$

für all diejenigen $r, s \in [t_0, t]$ gilt, die $r \neq s$ und $|s - r| < \delta$ erfüllen.[10] Wir unterteilen jetzt $[t_0, t]$ in n gleich lange Teilintervalle mit den Randpunkten $t_0 < t_1 < \cdots < t_n := t$, wobei wir $n \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass einerseits die Länge $\ell := \frac{t-t_0}{n}$ der Teilintervalle kleiner als δ ist und dass anderseits die in (6.2.2) definierte Riemann-Summe S die Abschätzung $\left|\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s - S\right| < \varepsilon$ erfüllt.

Wie in Punkt (3) vor dem Beweis definieren wir die Summe D durch die Gleichung (6.2.3) und berechnen, dass $D = F(t) - F(t_0)$ gilt. Den Abstand von D zu S können wir nach oben abschätzen durch

$$|S - D| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \ell \left| f(t_k) - \frac{F(t_{k+1}) - F(t_k)}{\ell} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \ell \frac{\varepsilon}{t - t_0} \leq n\ell \frac{\varepsilon}{t - t_0} = \varepsilon,$$

wobei die zweite Ungleichung aus der gleichmäßigen Differenzierbarkeit von F – genauer aus (6.2.4) – folgt, weil $|t_{k+1} - t_k| = \ell < \delta$ ist.

Insgesamt gilt also wie behauptet $\left|\int_{t_0}^t f(s)\,\mathrm{d}s - D\right| < 2\varepsilon$ und der Satz ist somit bewiesen. □

[9] Außerdem ist das zweite Approximationsargument, das wir verwendet haben, auch ziemlich hemdsärmelig: Es stimmt zwar, dass die Differenzenquotienten $\frac{F(t_{k+1})-F(t_k)}{\ell}$ nahe an den Ableitungen $F'(t_k) = f(t_k)$ liegen, wenn n groß (und ℓ somit klein) ist. Aber wir bilden ja noch eine Summe, die sehr viele Summanden hat, wenn n groß ist. Wir müssen also auch irgendwie ausschließend, dass die kleinen Fehler sich hierbei zu einem großen Fehler aufsummieren.

[10] Diese Aussage ist ähnlich zu Theorem 3.3.8, in dem wir bewiesen hatten, dass eine stetige Funktion auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall automatisch gleichmäßig stetig ist. Wir verzichten an dieser Stelle darauf, die entsprechende Aussage für differenzierbare Funktionen ebenfalls zu beweisen, verwenden Sie allerdings im Beweis von Theorem 6.2.3.

Man kann Theorem 6.2.3 übrigens auch beweisen ohne das Konzept der gleichmäßigen Differenzierbarkeit zu verwenden, in dem man zuerst Theorem 6.2.4 unten beweist und Theorem 6.2.3 dann darauf zurückführt. Das ist sogar etwas kürzer, aber vielleicht auch etwas weniger intuitiv.

Im ersten Teil des Hauptsatzes – also in Theorem 6.2.3 – haben wir mit einer stetig differenzierbaren Funktion F begonnen, F abgeleitet, die Ableitung wieder integriert; der Satz besagt, wie man das Ergebnis wieder mit Hilfe von F ausdrücken kann.

Nun gehen wir anders herum vor: Wir starten mit einer stetigen Funktion f, definieren eine neue Funktion F, in dem wir über f integrieren, und leiten anschließend wieder ab. Der folgende Theorem 6.2.4 – der zweite Teil des Hauptsatzes – besagt, dass man als Ergebnis f zurückerhält.

Theorem 6.2.4 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 2. Teil). *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, sei $t_0 \in I$ und sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$ definiert. Dann ist die Funktion F stetig differenzierbar und ihre Ableitung F' ist gleich f.

Beweis. Wir betrachten Punkte $t_1, t_2 \in I$, wobei wir t_2 festhalten und $t_1 \neq t_2$ sei. Wir zeigen, dass der Differenzenquotient $\frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1}$ für $t_1 \to t_2$ gegen $f(t_2)$ konvergiert. Sei dazu $I_{t_1,t_2} \subseteq \mathbb{R}$ das abgeschlossene Intervall zwischen t_1 und t_2.[11] Dann ist

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(t_2)-F(t_1)}{t_2-t_1} - f(t_2)\right| &= \left|\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,\mathrm{d}s \;-\; f(t_2)\right| \\
&= \left|\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} f(s)-f(t_2)\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \frac{1}{|t_2-t_1|}\int_{I_{t_1,t_2}} |f(s)-f(t_2)|\,\mathrm{d}s \\
&\le \sup_{s\in I_{t_1,t_2}} |f(s)-f(t_2)|\,.
\end{aligned}$$

Der letztgenannte Term geht für $t_1 \to t_2$ gegen 0, das f laut Voraussetzung stetig ist und somit insbesondere stetig in t_2 ist. □

Mit den beiden Hauptsätzen kann etwas effizienter arbeiten, wenn man die folgende Terminologie einführt:

Definition 6.2.5 (Stammfunktion). Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge ohne isolierten Punkt und seien $f, F\colon M \to \mathbb{R}$. Wir sagen, dass $F\colon M \to \mathbb{R}$ eine **Stammfunktion** von f ist, falls F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

Mit Hilfe des Begriffs **Stammfunktion** kann man die beiden Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung folgendermaßen ausdrücken:

Vorlesung 28 (Fr, 31.01.) beginnt mit Bemerkung 6.2.6

[11] Das heißt $I_{t_1,t_2} = [t_1,t_2]$ falls $t_1 < t_2$ gilt und $I_{t_1,t_2} = [t_2,t_1]$ falls $t_1 > t_2$ gilt.

Bemerkung 6.2.6 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt.

(a) Theorem 6.2.3 besagt:

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $t_0, t \in I$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s)\,\mathrm{d}s = F(t_1) - F(t_0).$$

Für den Ausdruck $F(t_1) - F(t_0)$ verwendet man oft auch die Kurzschreibweise $F(s)|_{s=t_0}^{s=t_1}$.

(b) Theorem 6.2.4 besagt:

Sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig, sei $t_0 \in I$ und sei $F\colon I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s)\,\mathrm{d}s$$

für alle $t \in I$ definiert. Dann ist F eine Stammfunktion von f.

Beachten Sie: Theorem 6.2.4 zeigt, dass jede auf einem Intervall I (mit mehr als einem Punkt) definierte stetige Funktion f eine Stammfunktion besitzt.[12] Theorem 6.2.3 ist häufig sehr praktisch um Integrale auszurechnen:

Beispiele 6.2.7 (Intergrieren einiger klassischer Funktionen)**.** (a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + x^3$. Dann ist

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

eine Stammfunktion von f, wie man durch Ableiten von F leicht überprüft. Somit gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b x + x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4.$$

(b) Es gilt

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}$$

(c) Es gilt

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

[12] Das heißt aber nicht unbedingt, dass man für diese Stammfunktion auch eine explizite Formel finden kann!

(d) Für alle $t_0, t_1 \in (-1,1)$ gilt

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{1-s^2}\,\mathrm{d}s &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{(1+s)(1+s)}\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\frac{1}{1+s} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-s}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2}\Big(\log(1+s) - \log(1-s)\Big)\Big|_{s=t_0}^{s=t_1} = \frac{1}{2}\log\big(\frac{1+s}{1-s}\big)\Big|_{s=t_0}^{s=t_1} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\log\big(\frac{1+t_1}{1-t_1}\big) - \log\big(\frac{1+t_0}{1-t_0}\big)\Big) = \frac{1}{2}\log\big(\frac{(1+t_1)(1-t_0)}{(1-t_1)(1+t_0)}\big).\end{aligned}$$

Korollar 6.2.8 (Partielle Integration)**.** *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt und seien $f, g\colon I \to \mathbb{C}$. Die Funktion g sei stetig differenzierbar und f sei stetig mit einer Stammfunktion F. Dann gilt für alle $t_0, t_1 \in I$*

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s)g(s)\,\mathrm{d}s = \big(F(s)g(s)\big)\Big|_{s=t_0}^{s=t_1} - \int_{t_0}^{t_1} F(s)g'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Beweis. Die Funktion $Fg : I \to \mathbb{C}$ ist differenzierbar als Produktzweier differenzierbarer Funktionen und ihre Ableitung ist laut Produktregel gleich $(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'$. Also gilt für alle $t_0, t_1 \in I$

$$\int_{t_0}^{t_1} f(s)g(s)\,\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t_1} F(s)g'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (Fg)'(s)\,\mathrm{d}s = (Fg)(s)\Big|_{s=t_0}^{s=t_1},$$

wobei wir für die zweite Gleichheit Theorem 6.2.3 verwendet haben. □

Beispiel 6.2.9 (Eine Anwendung der partiellen Integration)**.** Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t s\cos(s)\,\mathrm{d}s &= \big(s\sin(s)\big)|_{s=0}^{s=t} - \int_0^t \sin(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \big(s\sin(s)\big)\Big|_{s=0}^{s=t} + \cos(s)\Big|_{s=0}^{s=t} = t\sin(t) + \cos(t) - 1.\end{aligned}$$

Korollar 6.2.10 (Substitutionsregel)**.** *Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle mit mehr als einem Punkt. Sei $f : I \to J$ stetig differenzierbar und $g : J \to \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt für alle $t_0, t_1 \in I$*

$$\int_{t_0}^{t_1} g\big(f(s)\big)f'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{f(t_0)}^{f(t_1)} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis. Da g stetig ist, besitzt g laut Theorem 6.2.4 eine Stammfunktion $G\colon J \to \mathbb{C}$. Die Funktion $G \circ f\colon I \to \mathbb{C}$ ist als Hintereinanderausführung differenzierbarer Funktionen differenzierbar und seine Ableitung ist laut Kettenregel gegeben durch

$$(G \circ f)'(s) = g\big(f(s)\big)f'(s)$$

für alle $s \in I$. Somit sehen wir insbesondere, dass $G \circ f$ stetig differenzierbar ist. Es folgt für alle $t_0, t_1 \in I$

$$\int_{t_0}^{t_1} g\big(f(s)\big)f'(s)\,\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} (G \circ f)'(s)\,\mathrm{d}s = G\big(f(t_1)\big) - G\big(f(t_0)\big) = \int_{f(t_0)}^{f(t_1)} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei wir für jede der letzten beiden Gleichheiten Theorem 6.2.3 verwendet haben. □

Als einfaches Beispiel berechnen wir das folgende Integral.

Beispiel 6.2.11 (Eine Anwendung der Substitutionsregel)**.** Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^t s\exp(s^2)\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{2}\int_0^t 2s\exp(s^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{0^2}^{t^2}\exp(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\exp(x)\Big|_{x=0}^{x=t^2} = \frac{1}{2}\Big(\exp(t^2)-\exp(0)\Big).\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Literaturverzeichnis

[Dei08] Oliver Deiser. *Reelle Zahlen. Das klassische Kontinuum und die natürlichen Folgen*. Springer, 2008. 2., korrigierte und erweiterte Auflage.

[For16] Otto Forster. *Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen*. Springer Spektrum, 2016. 12. Auflage.

[Glü24] Jochen Glück. Grundlagen der Mathematik. Vorlesungsmanuskript, Bergische Universität Wuppertal, Sommersemester 2024.

[Kön04] Konrad Königsberger. *Analysis 1*. Springer, 2004. 6., durchgesehene Auflage.

[SW03] Uwe Storch and Hartmut Wiebe. *Lehrbuch der Mathematik. Band 1: Analysis einer Veränderlichen*. Spektrum Akademischer Verlag, 2003. 3. Auflage.