Bergische Universität Wuppertal
SS 2013

Bálint Farkas
Sven-Ake Wegner

Klausur Analysis 1

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:

Wichtige Hinweise:

- Sofern nicht anders angegeben, müssen alle Rechnungen, Ergebnisse, Folgerungen etc. **begründet** werden. Was den Umfang und die Form der Begründung angeht orientieren Sie sich an den vorgeführten Lösungen der Übungsblätter und der Probeklausur.
- Mobiltelefone und ähnliche Geräte sind während der gesamten Klausur **verboten**. Ein Mobiltelefon auf Ihrem Tisch oder in Ihrer Hand bedeutet das sofortige Ende Ihrer Klausur.

Wir wünschen viel Erfolg!

Aufgabe	A	B	C.1	C.2	C.3	C.4	C.5	C.6	C.7	$\sum$	Bonus	Note
Max.	10	20	10	10	10	20	10	10	10	110		
Punkte												

Teil A

Aufgabe. (5×2=10 Punkte)

Geben Sie eine Definition der folgenden Sachverhalte:

a) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Formulieren Sie:

d) den Langrangeschen Mittelwertsatz.

Geben Sie ein Beispiel:

e) für eine stetige aber nicht differenzierbare Funktion.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Teil B

Aufgabe. (10×2=20 Punkte) Beantworten Sie die folgenden Fragen. Tragen Sie Ihre Antwort in die Tabelle ein. Es ist keine Begründung hier notwendig!

1.	$\sup\left\{\sin(x)\middle\vert x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)\right\} =?$	
2.	$\inf\left\{\sin(x)\middle\vert x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)\right\} =?$	
3.	$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^3+27}{2n^2+n+1} =?$	
4.	$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+3x)}{x} =?$	
5.	Ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex / konkav / beides / keines der beiden?	
6.	Die Ableitung von $f(x) = \frac{\cos(\sin(x))}{1+\mathrm{e}^x}$?	
7.	Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{3/2}}$ absolut konvergent? (JA/NEIN)	
8.	Ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(n)}$ konvergent? (JA/NEIN)	
9.	$\lim\limits_{x\to 0} x\log(x) =?$	
10.	Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2013} x^n$?	

Teil C

Aufgabe 1. (4+6=10 Punkte) Wir definieren die Folge $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ durch die folgende Rekursion:

$$a_1 := \frac{c}{2} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}(c + a_n^2) \quad \text{für } n \in \mathbb{N},\ n \geq 1 \text{ und } c > 0.$$

Beweisen Sie, daß die Folge (a_n) monoton steigend ist. Bestimmen Sie diejenige $c > 0$, für die die Folge (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie in diesen Fällen den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 2. (5+5=10 Punkte) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)^n + n^{\sqrt{n}} + n^{2013} + 2013^n}{n^n + n!}$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 3. (5+5=10 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ seien $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \arctan(nx) \quad \text{und} \quad g_n(x) := \arctan(x/n).$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Folgen (f_n) und (g_n) sowie die jeweiligen Limes-Funktionen.

b) Ist die Konvergenz im Teil a) gleichmäßig?

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 4. (20 Punkte) Diskutieren Sie die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Hier sind die folgenden Punkte zu beachten:

1. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich und ggf. (einseitige) Grenzwerte an den Randpunkten des Definitionsbereichs (und im Unendlichen).
2. Bestimmen Sie, an welchen Stellen f stetig ist.
3. Bestimmen Sie, an welchen Stellen f differenzierbar ist.
4. Bestimmen Sie die lokalen Extremstellen, die zughörigen Funktionswerte von f und geben Sie an, ob es sich um Minima oder Maxima handelt.
5. In welchen Intervallen ist f wachsend bzw. fallend?
6. In welchen Intervallen ist f konvex bzw. konkav?
7. Bestimmen Sie die Wendestellen und die gehörigen Funktionswerte von f.
8. Bestimmen Sie, falls vorhanden, globale Extremstellen, die zughörigen Funktionswerte von f und geben Sie an, ob es sich um das Minimum oder Maximum handelt.
9. Bestimmen Sie den Wertebereich von f.
10. Skizzieren Sie den Graph von f.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 5. (10 Punkte) Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$ für die die folgende Reihe absolut konvergent bzw. konvergent ist:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n x^n$$

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 6. (2+6+2=10 Punkte) Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & x \neq 0, \\ \alpha & x = 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so daß f stetig wird. Zeigen Sie, daß f für dieses α sogar differenzierbar ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung f'. Zeigen Sie, daß f' stetig ist.

Notieren Sie hier Ihre Lösung:

Aufgabe 7. (5+5=10 Punkte) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar mit

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \infty,$$

und $f''(x) > 0$ für alle $x \in (0,1)$. Beweisen Sie, daß

a) f eine eindeutige Minimalstelle in $(0,1)$ hat.

b) $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = -\infty$ und $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f'(x) = \infty$.

Notieren Sie hier Ihre Lösung: